Bienvenu en PCSI du lycée Descartes.

Chers futurs étudiants,
Vous avez été admis en PCSI au Lycée Descartes : toute l'équipe pédagogique sera ravie de vous recevoir à la rentrée. Dans ce petit fascicule, vous trouverez les principales informations concernant votre future classe : organisation, attentes, déroulement de l'année. Nous vous encourageons à lire ce document qui regorge de conseils venant de vos futurs professeurs.

Les clés de la réussite en PCSI (et en CPGE en général), sont le travail et l'organisation. Si vous suivez les conseils de ce fascicule, vous aurez tous les outils pour démarrer l'année sur de bonnes bases. Il est important que vous preniez un peu de temps pour vous après votre baccalauréat, mais il est aussi important, pour une bonne réussite, de se préparer à l'entrée en CPGE.

Alors bonnes vacances et rendez-vous en septembre.

L'équipe pédagogique de PCSI.

Mathématiques

Les disciplines scientifiques (sciences-physiques, chimie, mathématiques, science de l'ingénieurI) seront vos matières principales. Beaucoup de choses seront revues de la terminale surtout lors de la première période. Mais la façon de les aborder sera radicalement différente de ce que la plupart d'entre vous aura connu jusqu'ici.

Cependant, un des points essentiels qu'il faut acquérir rapidement sont les savoir-faire en calcul. Une grande différence apparaîtra dès le début de l'année entre les élèves sur la base de ces capacités en calcul : il faut notamment savoir poser, à l'écrit, correctement un calcul et acquérir au fil de l'année de la rapidité.

Pour vous aider dans votre préparation, vous trouverez en fin de livret un ensemble d'exercices et de rappels, allant jusqu'au niveau terminale S avec leur corrigé, que vous devriez savoir faire en arrivant le premier jour. Nous vous encourageons évidemment à chercher ces exercices pendant vos vacances. Une petite précision : la calculatrice ne sera que très très rarement autorisée lors des devoirs de mathématiques, comme lors des concours d'ailleurs. Donc vous devrez connaître vos formules, et notamment toutes les formules de trigonométrie, de puissance, sur les fonctions exponentielle et logarithme ($exp(a + b) = exp(a) \times exp(b)$...) Si vous les connaissez en arrivant en septembre, ce sera toujours cela de moins à travailler pendant l'année. Il n'est pas utile de chercher à prendre de l'avance : consolider les bases de calcul du lycée est la priorité.

Sciences Physiques

La physique enseignée dans le supérieur est très différente de celle qui vous a été présentée au lycée. Votre principal problème en physique cette année sera, pour la plupart, votre niveau en mathématiques et plus spécifiquement en calcul.
Pour commencer du bon pied vous devriez arriver à la rentrée en maîtrisant la trigonométrie et les calculs d'intégrales et de dérivées. Ce sont deux outils de base du physicien et nous les utiliserons intensément dès la rentrée.

Sciences de l'Ingénieur

Les Sciences industrielles pour l'ingénieur sont une discipline complètement nouvelle pour la plupart d'entre vous. Il s'agit d'une matière vraiment transversale. Dès le début de l'année, nous mettrons en place des techniques et des méthodes qui demandent une bonne maîtrise des calculs mathématiques élémentaires. Les lois élémentaires de sciences physiques seront rapidement employées. Tout effort fourni pendant l'été dans ce sens se ressentira largement dans cette matière et vous permettra de concentrer votre apprentissage sur les notions propres à cette discipline. Au delà des aspects scientifiques, un niveau d'expression convenable (orthographe, grammaire, formulation des idées, etc.) est attendu. Un vocabulaire précis sera à acquérir rapidement pour obtenir dès le départ de très bons résultats. Certains documents pourront être fourni en langue anglaise. Ne négligez pas les langues !

anglophones.

Informatique

L'enseignement en CPGE contient une partie d'informatique en tronc commun. Le programme parcourt les domaines de l'algorithmique, du calcul numérique et des bases de données, comme des parties plus techniques. Le langage utilisé est le langage Python. Comme cette matière est nouvelle pour la plupart des étudiants, tout sera repris de zéro. Il n'est donc pas nécessaire de particulièrement s'y préparer. Cependant, certains d'entre vous voudront peut-être se familiariser avec le langage. Si vous n'y connaissez rien et que vous souhaitez vous y mettre, le site OpenClassRooms propose une bonne introduction au langage. Si vous avez déjà quelques notions de programmation, vous pouvez par exemple vous exercer sur les problèmes du projet Euler : *https ://projecteuler.net/*

FICHE D'EXERCICES DE CALCULS.

exercice 1
Calculer de deux façons

$$A = \left(-\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + 1\right) - \left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{5} - 2\right) + \left(-2 + \frac{4}{5}\right)$$

– en calculant d'abord chaque parenthèse
– en supprimant les parenthèses et en regroupant les termes qui donnent un résultat simple.

,

corrigé
$\dfrac{32}{15}$

exercice 2
Calculer :
– $A = ((a - c) - (a - b)) - ((b - c) - (a + c))$
– $B = \left(1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)\right) - \left(1 - \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{4}\right)\right) - \left(1 - \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4}\right)\right).$
– $C = \left(-1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right) \times (-4)$
– $D = \left(\frac{4}{9} - \frac{11}{27}\right)\left(2 - \frac{4}{3}\right)$
– $E = \dfrac{3 - \frac{2}{5} + \frac{3}{4}}{2 + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}}$
– $F = \dfrac{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}}.$

,

corrigé
$A = a + c, \quad B = \frac{29}{12}, \quad C = \frac{7}{5}, \quad D = \frac{2}{81}, \quad E = \frac{201}{128}, \quad F = -\frac{17}{2}.$

exercice 3
Rappels : pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)2$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$
$\sqrt{a^2} = a$ si $a \geq 0$; $\sqrt{a^2} = -a$ si $a \leq 0$
$(\sqrt{a})^2 = a$

Exprimer sans racine carrée (ou avec strictement moins de racine carrée) :

$\sqrt{(-5)^2}$ $\qquad$ $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$ $\qquad$ $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$

$\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$ $\qquad$ $\sqrt{(3 - \pi)^2}$ $\qquad$ $\sqrt{(3 - a)^2}$ selon les valeurs de a

.

corrigé $\sqrt{(-5)^2}=5,\ \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1,\ \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=2-\sqrt{3}$
$\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}=\sqrt{7}-2,\ \sqrt{(3-\pi)^2}=\pi-3,\ \sqrt{(3-a)^2}=\begin{cases} a-3 & \text{si } a\geqslant 3\\ 3-a & \text{sinon}\end{cases}$

exercice 4
Ecrire aussi simplement que possible :

$(2\sqrt{5})^2$	$(2+\sqrt{5})^2$	$(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^3$
$\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$	$\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$	$\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$
$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$	$\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$	

corrigé

20	$9+4\sqrt{5}$	$12\sqrt{7}$
12	$\dfrac{7-10\sqrt{2}}{3}$	$50-25\sqrt{3}$
10	$2\sqrt{2}$	

Méthode : Pour rendre rationnel un dénominateur, on utilise l'identité $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.
Ainsi : $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4-2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

exercice 5
Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes :

$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$	$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
$\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$	$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

corrigé

$$\frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2},3-2\sqrt{2},\quad 1+\sqrt{15}-\sqrt{10},\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2,\quad -\sqrt{2}-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+3}{2}$$

exercice 6
Rappels pour tout $(a,b)\in(\mathbb{R}^+)^2$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{a}=\sqrt{b}\Longleftrightarrow a=b\\ \sqrt{a}=b\Longleftrightarrow a=b^2\end{array}}$$

Vérifier les égalités suivantes :
$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3},\quad \sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3},\quad \sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{2},\quad \sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

corrigé
on observe que les expressions de part et d'autre du signe égal sont de même signe puis on élève au carré.

exercice 7

Définition du factoriel : pour n entier naturel

$$\boxed{\begin{array}{l} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ \text{si } n \geq 2,\ n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \end{array}}$$

– Simplifier $\dfrac{12!}{8!}$, $\dfrac{12!}{3!10!}$, $\dfrac{1}{9!} - \dfrac{1}{10!}$

– Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b deux réels strictement positifs, simplifier

$$A_n = \frac{(n+3)!}{(n+1)!}, \quad B_n = \frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}, \quad C_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ où } u_n = \frac{a^n}{n!b^{2n}}$$

corrigé

– $\dfrac{12!}{8!} = 12 \times 11 \times 10 \times 9$ (Achevez) $\quad \dfrac{12!}{3!10!} = \dfrac{12 \times 11}{6} = 22, \quad \dfrac{1}{9!} - \dfrac{1}{10!} = \dfrac{9}{10!} = \dfrac{1}{10 \times 8!} = \dfrac{1}{403200}$.

– $A_n = (n+3)(n+2)$, $B_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$, $C_n = \dfrac{a}{(n+1)b^2}$.

exercice 8

Rappels : pour n et m entiers relatifs, a et b nombres complexes

$$\boxed{\begin{array}{l} a^n \times a^m = a^{m+n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ (} a \text{ étant ici non nul)} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n} \text{(} b \text{ étant ici non nul).} \end{array}}$$

Développez, regrouper, réduire.

$A = (7xy)^3, \quad B = (2a^2b^3)^5, \quad C = \left[\left(\dfrac{-a}{b}\right)^3\right]^2 \times \left[(-b)^2\right]^3, \quad D = xy \times \left(\dfrac{-2}{3}\right) x^2 \times \dfrac{3}{4}y^2,$

$E = \left(\dfrac{2}{7}\right) a^2 \times \left(\dfrac{-3}{4}\right) xy^3 \times \left(\dfrac{-2}{5}\right) a^2 x, \quad F = \left(\dfrac{-3}{5}\right) a^2 . \left(\dfrac{2}{3}\right) b^2 x.(-x)^4, \quad G = 4x^3.(-3y^2). \left(\dfrac{-5}{6}\right) a^2x^2y^5.$

corrigé

$A = 343x^3y^3, \quad B = 32a^{10}b^{15}, \ C = a^6, \quad D = -\dfrac{1}{2}x^3y^3, \quad E = \dfrac{3}{35}a^4x^2y^3, \quad F = -\dfrac{2}{5}a^2b^2x^5, \ G = 10a^2x^5y^7.$

exercice 9

Simplifier :

$A = \dfrac{4^{12}}{2^{25}}; \quad B = \dfrac{3}{2}\dfrac{2^n}{3^{n+1}}; \quad E = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$

$F = (-1)^3 \left(-\dfrac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\dfrac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\dfrac{1}{14}\right)$

$G = 77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7 \times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times (7^{-9})^{-3} \times \dfrac{1}{(-11)^{-3}}$

$K = (a^{n^2})^2; \quad L = \dfrac{a^{n^2}}{a^n}; \quad M = a^{3n}(a^n)^3; \quad P = (a^n)^n.$

corrigé

$A = \dfrac{1}{2}; \quad B = \dfrac{2^{n-1}}{3^n}; \quad E = \dfrac{3}{8}; \quad F = \dfrac{7}{2^8}; \quad G = -7^{15}11^8, \ K = a^{2n^2}, \ L = a^{n(n-1)}, \ M = a^{6n}, \ P = a^{n^2}.$

exercice 10

Exprimer en fonction de e^x les nombres suivants :

$A = e^{kx}; \quad B = e^{-x}; \quad C = ee^{3x-1}; \quad D = e^x - e^{x+1}; \quad E = e^x + e^{-x}; \quad F = e^x + 2e^{-x} + 3.$

corrigé

$A=(e^x)^k,\ B=\dfrac{1}{e^x},\ C=(e^x)^3;\quad D=(1-e)e^x;\quad E=e^x+\dfrac{1}{e^x},\ F=\dfrac{(e^x)^2+2e^x+2}{e^x}=\dfrac{(e^x+1)(e^x+2)}{e^x}.$

exercice 11

Réduire et ordonner les polynômes suivants :

$P(x)=7x^3+8x-3+4x-2x^3-5x+2$

$Q(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{5}{4}x-3x^2+\dfrac{x}{6}-\dfrac{5}{2}x^2+5+4x^2$

$R(x)=\dfrac{3}{2}x^2+xy+y^2-2xy+\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{3}{2}x^2$

$S(a)=4a^2-\dfrac{2}{3}a-\dfrac{2}{5}a^2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}a-5a+\dfrac{2}{15}a^2-\dfrac{3}{4}$

$T(x)=4x^2-\dfrac{7}{2}+\dfrac{3}{5}x-\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{4}{3}x^3-5+\dfrac{3}{2}x^3+7-2x$

corrigé

$P(x)=5x^3+7x-1$

$Q(x)=-3x^2+\dfrac{17}{12}x+5$

$R(x)=-\dfrac{3}{2}x^2-xy+y^2$

$S(a)=\dfrac{56}{15}a^2-\dfrac{16}{3}a-\dfrac{1}{4}$

exercice 12

Former les polynômes $A+B+C$; $A-B+C$; $A+B-C$; $-A+B+C$ avec

$A=3x^2-4x+5$ $\qquad B=2x^2+4-5x$ $\qquad C=3-x+4x^2$

corrgié

$A+B+C=9x^2-10x+12$

$A-B+C=5x^2+4$

$A+B-C=x^2-8x+6$

$A+B+C=3x^2-2x+2$

exercice 13

Même question avec

$A=5a^2-3ab+7b^2$ $\qquad B=9b^2-8ab+6a^2$ $\qquad C=-7b^2-3ab+4a^2$

corrigé

$A+B+C+=15a^2-14ab+9b^2$

$A-B+C=3a^2+2ab-9b^2$

$A+B-C=7a^2-8ab+23b^2$

$-A+B+C=5a^2-8ab-5b^2$

exercice 14

Effectuer les produits suivants, réduire et ordonner les résultats :

$A=(4x^5+7-2x^3)(x^3-2x)$ $\qquad B=(5x^3-2x)(3x-4x^2)$

$C=(7x^4-2x^3+4x^2)(3x^2-5)$ $\qquad D=(2x^2-4+2x)(x^2+5-2x)$

$E=(2x-7x^2+5x^3)(3x-5x^2+8)$ $\qquad F=\left(\dfrac{5}{4}x^3-2x+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{7}{2}x^3-2x+\dfrac{1}{2}\right)$

$G=(3x^2-1)(x+1)(x-1)$ $\qquad H=(4x^3-7x+2x^2+5)^2$

corrigé

$A=4x^8-10x^6+4x^4+7x^3-14x$ $\qquad B=-20x^5+15x^4+8x^3-6x^2$

$C=21x^6-6x^5-23x^4+10x^3-20x^2$ $\qquad D=2x^4-2x^3+2x^2+18x-20$

$E=-25x^5+50x^4+9x^3-50x^2+16x$ $\qquad F=\dfrac{35}{8}x^6-\dfrac{19}{2}x^4+\dfrac{19}{8}x^3+4x^2-2x+\dfrac{1}{4}$

$G=3x^4-4x^2+1$ $\qquad H=16x^6+16x^5-52x^4+12x^3+69x^2-70x+25$

exercice 15
Rappels : pour tout a et b nombres complexes

$$\boxed{\begin{array}{l}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\\(a-b)(a+b)=a^2-b^2\\\text{On a aussi } a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\text{(vérifier cette égalité.)}\\\text{On a aussi } a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\text{(vérifier cette égalité.)}\end{array}}$$

Démontrer que pour tous réels a, b, c, on a les égalités :

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc=&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\\=&\frac{1}{2}(a+b+c)((b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2)\end{aligned}$$

corrigé Méthode : développer les expressions de gauche et vérifier ainsi que l'on trouve celles de droite.

exercice 16
Factoriser :

$$\begin{array}{lll}A=x^2-2x+1 & B=x^2+x+\dfrac{1}{4} & C=4x^2-4x+1\\ D=a^2+4a+4 & E=4x^3+8x^2y+4xy^2 & F=(x+y)^3-x^3-y^3\\ G=(x-y)^3-x^3+y^3 & H=x^3+27y^3 & K=8a^3-125\end{array}$$

corrigé

$$\begin{array}{lll}A=(x-1)^2 & B=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 & C=(2x-1)^2\\ D=(a+2)^2 & E=4x(x+y)^2 & F=3xy(x+y)\\ G=3xy(-x+y) & H=(x+3y)(x^2-3xy+9y^2) & K=(2a-5)(4a^2+10a+25)\end{array}$$

exercice 17
Utiliser les identités classiques pour développer les produits suivants :
corrigé

$$\begin{array}{ll}A=\left(\dfrac{3}{2}x^3-\dfrac{2}{5}y^2\right)^2 & B=\left(\dfrac{4}{3}x^5+\dfrac{2}{5}y^3\right)^2\\ C=\left(\dfrac{2}{5}x^2-\dfrac{3}{4}y\right)\left(\dfrac{2}{5}x^2+\dfrac{3}{4}y\right) & D=\left(\dfrac{2}{3}a^2x^3-\dfrac{1}{2}b^4\right)\left(\dfrac{2}{3}a^2x^3+\dfrac{1}{2}b^4\right)\\ E=(3x+4y-5)(3x+4y+5) & F=\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{5}y-1\right)\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{5}y+1\right)\\ G=(3x+4y-2z)^2 & H=\left(\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{4}y+z\right)^2\end{array}$$

corrigé

$$\begin{array}{ll}A=\dfrac{9}{4}x^6-\dfrac{6}{5}x^3y^2+\dfrac{4}{25}y^4 & B=\dfrac{16}{9}x^{10}+\dfrac{16}{15}x^5y^3+\dfrac{4}{25}y^6\\ C=\dfrac{4}{25}x^4-\dfrac{9}{16}y^2 & D=\dfrac{4}{9}a^4x^6-\dfrac{1}{4}b^8\\ E=9x^2+24xy+16y^2-25 & F=\dfrac{4}{9}x^2-\dfrac{16}{25}y^2\dfrac{8}{5}y-1\\ G=9x^2+24xy-12xz+16y^2-16yz+4z^2 & H=\left(\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{4}y+z\right)^2\\ & \quad=\dfrac{25}{4}x^2-\dfrac{15}{4}xy+5xz+\dfrac{9}{16}y^2+\dfrac{3}{2}yz+z^2\end{array}$$

exercice 18

Compléter de façon à obtenir une expression de la forme $(T+U)^2$

$A = x^2 + \cdots + 16$ $\qquad$ $B = x^2 - \cdots + 9a^2$

$C = 4x^2 - 4x + \cdots$ $\qquad$ $D = 9x^2 + 6x + \cdots$

$E = x^2 + \cdots + y^4$ $\qquad$ $F = 4a^2x^2 - \cdots + 1$

corrigé

$A = x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$ $\qquad$ $B = x^2 - 6ax + 9a^2 = (x-3a)^2$

$C = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$ $\qquad$ $D = 9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$

$E = x^2 + 2xy^2 + y^4 = (x+y^2)^2$ $\qquad$ $F = 4a^2x^2 - 4ax + 1 = (2ax-1)^2$

exercice 19

Décomposer en un produit de facteurs les expressions suivantes :

$A = \frac{5}{2}x^3y^2 - 5x^2y^2 + \frac{5}{2}xy^2$ $\qquad$ $B = 18abx^2 - 12abx + 2ab$

$C = \frac{4}{5}a^3x^2 - 5a^3y^2$ $\qquad$ $D = \frac{3}{4}a^2bx^2 - \frac{25}{3}a^2by^2$

$E = 25a^2x^4y^2 - 4b^2y^2$ $\qquad$ $F = (2x-3)^2 - (3x-5)^2$

$G = (2x+3)^2 - 4(2x+3)$ $\qquad$ $H = (5x^2+3x-2)^2 - (4x2-3x-2)^2$

$I = (3x-5)^2 + (3x-5)(2x+3)$ $\qquad$ $J = (a^2+b^2-2)^2 - (2ab-2)^2$

$K = a(x^2+1) - x(a^2+1)$ $\qquad$ $L = ab(x^2+y^2) + xy(a^2+b^2)$

$M = (a^2+b^2-10)^2 - (a^2-b^2-8)^2$ $\qquad$ $N = (4a^2+b^2-9c^2)^2 - 16a^2b^2$

corrigé

$A = \frac{5}{2}xy^2(x-1)^2$ $\qquad$ $B = 2ab(3x-1)^2$

$C = \frac{1}{5}a^3(2x-5y)(2x+5y)$ $\qquad$ $D = \frac{1}{12}a^2b(3x-10y)(3x+10y)$

$E = y^2(5ax^2-2b)(5ax^2+2b)$ $\qquad$ $F = -(5x-8)(x-2)$

$G = (2x+3)(2x-1)$ $\qquad$ $H = x(3x+2)(x+6)(3x-2)$

$I = (5x-2)(3x-5)$ $\qquad$ $J = (a+b+2)(a+b-2)(a-b)2$

$K = (ax-1)(-a+x)$ $\qquad$ $L = (ax+by)(ay+bx)$

$M = 4(b-1)(b+1)(a-3)(a+3)$ $\qquad$ $N = (2a+b-3c)(2a+b+3c)(2a-b+3c)(2a-b-3c)$

exercice 20

Simplifier les expressions suivantes, en admettant qu'elles sont définies :

$A = \dfrac{7a^2x^5}{2b^2x^4}$ $\qquad$ $B = \dfrac{-2a^3b^2x}{3a^3bx^3}$ $\qquad$ $C = \dfrac{10a^2x^3y^2}{-4a^4x^3y}$

$D = \dfrac{x^2}{x^2-x}$ $\qquad$ $E = \dfrac{x^2+x^3}{x^3-x}$ $\qquad$ $F = \dfrac{6x^2-4x}{9ax-6a}$

$G = \dfrac{ax+by}{a^2x^2-b^2y^2}$ $\qquad$ $H = \dfrac{x^3-9x}{3x^2-9x}$ $\qquad$ $I = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

corrigé

$A = \frac{7}{2}\frac{a^2x}{b^2}$ $\qquad$ $B = -\frac{2}{3}\frac{b}{x^2}$ $\qquad$ $C = -\frac{5}{2}\frac{y}{a^2}$

$D = \dfrac{x}{x-1}$ $\qquad$ $E = \dfrac{x}{x-1}$ $\qquad$ $F = \dfrac{2x}{3a}$

$G = \dfrac{1}{ax-by}$ $\qquad$ $H = \frac{1}{3}(x+3)$ $\qquad$ $I = \dfrac{x+1}{x-1}$

exercice 21

Réduire le plus possible.

$A = \dfrac{x+1}{6} + 2\dfrac{2x-1}{21} - \dfrac{3x+1}{14}$ $\quad$ $B = \dfrac{x+2}{5} - \dfrac{4x+3}{15} - \dfrac{x+1}{3}$

$C = \dfrac{1}{a(a+1)} - \dfrac{1}{a(a-1)} + \dfrac{2a}{a^2-1}$ $\quad$ $D = \dfrac{2}{2a+1} - \dfrac{1}{2a-1} + \dfrac{2}{4a^2-1}$

$E = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{x^2-3}{x^2-1}$ $F = \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$
$G = \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{4}{x^2-4}$ $H = \dfrac{x-2}{x^2+2x} - \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x}$
$I = \dfrac{x^3}{x^3-x^2} + \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-1}$ $J = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x-2}{x^2-4} - \dfrac{2}{x^2+2x}$

corrigé

$A = \dfrac{x}{7}$; $B = \dfrac{-6x-2}{15}$; $C = \dfrac{2}{a}$; $D = \dfrac{1}{2a+1}$; $E = \dfrac{x-1}{x+1}$; $F = \dfrac{x}{x+1}$; $G = \dfrac{1}{x+2}$; $H = \dfrac{-x-4}{x^2+2x}$; $I = \dfrac{2x}{x+1}$; $J = \dfrac{2}{x+2}$

exercice 22

Résoudre $(\dfrac{x+5}{2})^2 \leq \dfrac{x^2+25}{2}$

corrigé

On développe le membre de droite puis par mise au même dénominateur il vient : $x^2+25+10x \leq 2x^2+50$ soit $(x-5)^2 \geq 0$ Donc S=$\mathbb{R}$.

exercice 23

Pour a, b réels et n un entier naturel non nul, factoriser
$C = 16a^2-8a+1$; $D = a^4-4a^2b^2+4b^4$; $F = a^2+2a^4-b^2-2b^4$; $G = a^{2n}-1$; $J = a^3+8+(a+2)(2a-5)$; $K = a^2-4b^2$; $L = 4a^2+b^2-4ab$; $M = a^{2n}-4^n$; $P = (a+b)^2-4ab$

corrigé

$C = (4a-1)^2$; $D = (a^2-2b^2)^2$;
$F = (a^2-b^2)+2(a^4-b^4) = (a^2-b^2)+2(a^2-b^2)(a^2+b^2) = (a^2-b^2)(1+2(a^2+b^2))$;
$G = (a^n)^2-1^2 = (a^n-1)(a^n+1)$;
$J = (a+2)(a^2-2a+4)+(a+2)(2a-5) = (a+2)(a-1)(a+1)$;
$K = (a-2b)(a+2b)$;
$L = (2a-b)^2$;
$M = (a^n-2^n)(a^n+2^n)$;
$P = (a-b)^2$

Somme des termes d'une suite géométrique : pour q réel (ou complexe)

$$\boxed{1+q+q^2+...+q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \,;\, si\, q \neq 1 \\ n+1 \,;\, si\, q = 1 \end{cases}}$$

exercice 24

Calculer en fonction de n
$A_n = 1+3+9+...+3^{2n}$
$B_n = -1+4-16+...+(-1)^{n-1}4^n$
$C_n = 1-a^2+a^4-a^6+...+(-1)na^{2n}$
$D_n = u_0+...u_n$ où $u_n = (-5)^{3n+1}$

corrigé

$A_n = \dfrac{3^{2n+1}-1}{2}$; $B_n = \dfrac{-1+(-4)^{n+1}}{5}$; $C_n = \dfrac{1-(-a^2)^{n+1}}{1+a^2}$; $D_n = \dfrac{-5+5(-5^3)^{n+1}}{1+5^3}$

exercice 25

Calculer $A_n = 9+27+...+3^{n+2}$ (on factorisera par 3^2 pour se ramener à la formule encadrée). Calculer de même $B_n = a^2+a^4+...+a^{2n}$ et $C_n = 3^{n+2}+3^{n+3}+...+3^{2n+4}$.

corrigé

$A_n = \dfrac{9\times 3^{n+1}-9}{8}$; $B_n = \dfrac{a^2-a^{2n+2}}{1-a^2}$; $C_n = \dfrac{3^{2n+5}-3^{n+2}}{2}$

exercice 26

Calculer les nombres suivants

1. en fonction de $\ln 2$:
   $\ln 16$; $\ln 512$; $\ln 0.125$; $\frac{1}{8}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{8}$; $\ln 72 - 2\ln 3$
2. en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:
   $\ln 36$; $\ln\frac{1}{12}$; $\ln 2.25$; $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln 0.875$
3. en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$:
   $\ln 500$; $\ln\frac{16}{25}$; $\ln 6.25$; $\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \cdots + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100}$

corrigé

$\ln 16 = 4\ln 2$; $\ln 512 = 9\ln 2$; $\ln 0.125 = -3\ln 2$; $\frac{1}{8}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{8} = \frac{1}{2}\ln 2$; $\ln 72 - 2\ln 3 = 3\ln 2$
$\ln 36 = 2\ln 2 + 2\ln 3$; $\ln\frac{1}{12} = -2\ln 2 - \ln 3$; $\ln 2.25 = 2\ln 3 - 2\ln 2$; $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln 0.875 = 11\ln 2 + \ln 3$
$\ln 500 = 2\ln 2 + 3\ln 5$; $\ln\frac{16}{25} = 4\ln 2 - 2\ln 5$; $\ln 6.25 = 2\ln 5 - 2\ln 2$; $\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + ... + \ln\frac{99}{100} = -2\ln 2 - 2\ln 5$

exercice 27

Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire que $\dfrac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$

corrigé

$(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$

$\dfrac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \dfrac{7}{16}\ln((1+\sqrt{2})^2) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \dfrac{14}{16}\ln(1+\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = -\ln(\sqrt{2}-1)(\dfrac{7}{8} - \dfrac{32}{8}) = \dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$

exercice 28

Calculer y sachant que
$\ln y = \ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)$

corrigé

$\ln y = \ln(12\sqrt{2}+17)$ donc $y = 12\sqrt{2}+17$

exercice 29

Simplifier
$A = \ln((2+\sqrt{3})^{20}) + \ln((2-\sqrt{3})^{20})$; $B = \ln(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}) + \ln(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$

corrigé $A = 0$; $B = 0$

exercice 30

Simplifier les nombres suivants
$e^{3\ln 2}$; $\ln(\sqrt{e})$; $\ln(e^{\frac{1}{3}})$; $e^{-2\ln 3}$; $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$; $\ln(^5\sqrt{e})$

corrigé

$e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = 8$; $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$; $\ln(e^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}$; $e^{-2\ln 3} = \frac{1}{3}$; $\ln(e^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}$; $\ln(^5\sqrt{e}) = \frac{1}{5}$

exercice 31

Résoudre les équations suivantes :

$$\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7) \qquad (1)$$

$$\ln(-x-5) = \ln\left(\frac{x-61}{x+7}\right) \qquad (2)$$

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que x soit solution de la première équation, alors en passant à l'exponentielle dans l'égalité, on a $-(x+5)(x+7) = x-61$ soit encore $x^2+13x-26 = 0$ dont les solutions sont $x_1 = \frac{-13-\sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \frac{-13+\sqrt{273}}{2}$. On a ainsi trouvé les deux seuls bons candidats solutions. Mais on a par le calcul $-x_2-5 < 0$ donc le premier membre des deux équations n'est pas défini en x_2. Ainsi, seul x_1 peut être solution. De plus, $x_1 - 61 < 0$ donc la première équation n'est pas définie en x_1 : la première équation n'a pas de solution. Dans le cas de la deuxième, $\frac{x_1-61}{x_1+7}$ est bien strictement positive, et donc l'équation est définie en x_1 : la seconde équation admet x_1 comme unique solution.

exercice 32

Simplifier les expressions suivantes :

$$a = e^{\ln 3 - \ln 2} \qquad b = e^{-\ln \frac{1}{2}} \qquad c = e^{-\ln \ln 2} \qquad d = \ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$$

$$f = \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2}) \qquad g = \ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$$

$$h = \exp\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$$

corrigé

On trouve les expressions suivantes :

$$a = \frac{3}{2} \qquad b = 2 \qquad c = \frac{1}{\ln 2} \qquad d = -17 \qquad f = 1 \qquad g = -1 \qquad h = e$$

exercice 33

On pose $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Étudier la parité de f et calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

corrigé

La fonction est impaire et on peut calculer sa limite en $+\infty$ en factorisant en haut et en bas pas e^x :

$$f(x) = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \to 1$$

exercice 34

Simplifier, pour x non nul, l'expression $f(x) = xe^{\frac{1}{2}|\ln(x^2)|}$.

corrigé

On peut déjà simplifier l'expression avec les propriétés du logarithme et de la valeur absolue :

$$f(x) = xe^{|\ln|x||}$$

Si $x \in [-1; 1]$, alors le logarithme est négatif et $f(x) = xe^{-\ln|x|} = \frac{x}{|x|} = \pm 1$ selon le signe de x.

Si $|x| > 1$, alors le logarithme est positif, et $f(x) = xe^{\ln|x|} = x \times |x|$. On peut alors détailler les cas plus précisément :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

exercice 36

Résoudre les inéquations suivantes :

$$e^{3x-5} \geq 12 \qquad 1 \leq e^{-x^2+x} \tag{3}$$

$$e^{1+\ln x} \geq 2 \qquad e^{-6x} \leq \sqrt{e} \tag{4}$$

corrigé

inéquation 1 : $x \leq \frac{1}{3}(\ln 12 + 5)$
inéquation 2 : $x \in [0; 1]$
inéquation 3 : $x \geq \frac{2}{e}$
inéquation 4 : $x \geq -\frac{1}{12}$

exercice 37

Faire l'étude complète de la fonction $\tan = \frac{\sin}{\cos}$. (on montrera que tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ que tan est π-périodique et que $tan' = 1 + tan^2 = \frac{1}{cos^2}$ l'là où tan est dérivable.)

corrigé

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Elle y est continue et dérivable comme quotient de fonctions continues et dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On peut alors écrire de deux façons différentes : $\tan' = 1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$. On peut calculer que $\tan(x+\pi) = \tan(x)$ et donc la fonction est pi périodique. De plus $\tan(-x) = -\tan(x)$ donc la fonction est impaire. On se limite donc à l'étude sur $[0;\frac{\pi}{2}]$. D'après l'écriture de la dérivée, cette fonction est strictement croissante sur cet intervalle. Sa dérivée en 0 vaut 1. Sa limite en $\frac{\pi}{2}$ vaut $+\infty$. On peut dès lors tracer la courbe représentative de tan.

Rappels : pour tout u et v nombres réels

$cos(u) = cos(v) \iff u = v + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$ ou $u = -v + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$.
$sin(u) = sin(v) \iff u = v + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$ ou $u = \pi - v + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$.
On a aussi $tan(u) = tan(v) \iff u = v + k\pi\ k \in \mathbb{Z}$.($u, v$ n'étant pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$.)

Pour les exercices suivants, il est vivement conseillé de revoir les formules de trigonométrie vu en lycée qu'il faut connaître.

exercice 38

Résoudre les équations suivantes :

$$\sin x = \sin(\pi - 3x) \qquad (5)$$
$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(3x + \frac{\pi}{2}) \qquad (6)$$
$$\cos 2x + \cos\frac{x}{2} = 0 \qquad (7)$$
$$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \qquad (8)$$
$$\cos\left(\frac{7\pi}{5} - x\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5} + 3x\right) \qquad (9)$$
$$\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \tan 3x = 0 \qquad (10)$$
$$\cos x = \sin\frac{7x}{5} \qquad (11)$$
$$\cos 4x = \sin 7x \qquad (12)$$
$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos 2x = 0 \qquad (13)$$
$$\sin 2x + \cos 3x = 0 \qquad (14)$$

corrigé

$S_5 = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

$S_6 = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$S_7 = \left\{\frac{2\pi}{3} + k\frac{4\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{5} + k\frac{4\pi}{5};\right\}$
$S_8 = \emptyset$
$S_9 = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{10} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$S_{10} = \left\{\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$S_{11} = \left\{\frac{5\pi}{24} + \frac{5k\pi}{6}; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{4} + 5k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$S_{12} = \left\{\frac{\pi}{22} + \frac{2k\pi}{11}; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$S_{13} = \{\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$S_{14} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

exercice 40

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \pi \le x \le 2\pi\end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases}\cos x = -\frac{1}{2}\\ 0 \le x \le \pi\end{cases}$$

corrigé

Système (S_1) : La valeur $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ du sinus correspond à un x de la forme $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. On cherche une valeur comprise entre π et 2π. Cela correspond donc à $x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$. Système (S_2) : La valeur $-\frac{1}{2}$ du cosinus correspond à un x de la forme $2\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $4\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Dans l'intervalle $[0;\pi]$, seul $x = \frac{2\pi}{3}$ convient.

exercice 41

En remarquant que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

corrigé

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\,;\quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\,;\quad \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3}+2.$$

exercice 42

Simplifier $\dfrac{\sin(2a)}{\sin(a)} - \dfrac{\cos(2a)}{\cos(a)}$.

corrigé

$\dfrac{\sin(2a)}{\sin(a)} - \dfrac{\cos(2a)}{\cos(a)} = \dfrac{1}{\cos(a)}$ pour $a \notin \{k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

exercice 43

Calculer $\sin(x + \dfrac{\pi}{4})$ en fonction de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$;

En déduire la résolution des équations $\sin(x) + \cos(x) = 1$ puis $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$.

$\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x) + sin(x))$

$\sin(x) + \cos(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

exercice 44

Pour un réel **positif** a et x un réel, on a

$$\boxed{\begin{array}{l} |x| = x \text{ si } x \geq 0 \text{ et } |x| = -x \text{ si } x \leq 0. \\ \sqrt{x^2} = |x|. \\ |x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a \\ |x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -a \quad \text{ou} \quad a \leq x \end{array}}$$

Représenter graphiquement les solutions de l'encadré ci-dessus de deux façons :

- sur un axe réel
- en construisant la représentation graphique de la fonction $x \mapsto |x|$

exercice 45

Résoudre les inéquations suivantes :

(1) $|x - 3| \leq 4$ (2) $|2x + 1| \geq 5$ (3) $|x + 2| > -5$ (4) $|x - 1| \leq |2x + 3|$ (5) $|-2x + 3| \leq 7$

corrigé

(1) $-1 \leq x \leq 4$ (2) $x \leq -3$ ou $x \geq 2$ (3) $S = \mathbb{R}$ (4) $x \leq -4$ ou $x \geq -\dfrac{2}{3}$ (5) $-2 \leq x \leq 5$.

exercice 46

Résoudre les équations suivantes :

(1) $3x = 4$ (2) $\frac{4}{x-3} = 2$ (3) $\frac{2x+3}{x-5} = \frac{4}{3}$ (4) $\frac{3}{x-\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}-x}$

corrigé

(1) $x = \dfrac{4}{3}$ (2) $x = 5$ (3) $x = -14,5$ (4) $x = \dfrac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{5}$.

exercice 47

Résoudre les équations suivantes :

(1) $5(2x - 3) - 4(5x - 7) = 19 - 2(x + 11)$; (2) $4(x + 3) - 7x + 17 = 8(5x - 3) + 166$;

(3) $17 - 14(x + 1) = 13 - 4(x + 1) - 5(x - 3)$ (4) $17x + 15(x - 1) = -1 - 14(3x + 1)$

corrigé

(1) $x = 2$ (2) $x = -\dfrac{113}{43}$ (3) $x = \dfrac{21}{13}$ (4) $x = 0$.

exercice 48

Résoudre les équations suivantes :

(1) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$ (2) $x(5x + 1)(4x - 3)(3x - 4) = 0$

(3) $x(x + 1) = x + 1$ (4) $(x + 5)(4x - 1) + x^2 - 25 = 0$

(5) $4x^2 - 49 = 0$ (6) $(x + 7)^2 - 81(x - 5)^2 = 0$

(7) $3x^3 - 12x = 0$ (8) $(3x + 1)(x - 3)^2 = (3x + 1)(2x - 5)^2$

corrigé

(1) $x \in \{1; 2; 3\}$ (2) $x \in \{0; -\dfrac{1}{5}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{3}\}$ (3) $x \in \{-1; 1\}$ (4) $x \in \{-5; \dfrac{6}{5}\}$ (5) $x \in \{-\dfrac{7}{2}; \dfrac{7}{2}\}$

(6) $x \in \{-\dfrac{13}{2}; \dfrac{19}{5}\}$ (7) $x \in \{-2; 0; 2\}$ (8) $x \in \{-\dfrac{1}{3}; 2; \dfrac{8}{3}\}$

exercice 49

Rappeler et démontrer les résultats concernant les racines et le signes d'une fonction polynôme de degré 2. Faire les représentations graphiques correspondant aux différents cas.

exercice 50

Résoudre les équations suivantes

a) $8x^2 - 6x + 1 = 0$ b) $x^2 - 10x + 16 = 0$ c) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{8})x + 4 = 0$

d) $x^2-(a+2)x+2a=0$ e) $x^2+(1+\pi)x+\pi=0$ f) $-x^2+8x+6=0$
g) $8x^2+6x+1=0$ h) $-x^2+6x=0$ i) $3x^2=8$
j) $169x^2+13x-1=0$ k) $x^2+4ax+3a^2=0$ l) $-12x^2+125=0$
m) $-6x^2+7x-1=0$

corrigé

a) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ b) 8, 2 c) $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ d) 2, a e) -1, $-\pi$ f)$4-\sqrt{22}$, $4+\sqrt{22}$ g) $-\frac{1}{4}$, -$\frac{1}{2}$
h) 0, 6
i) $-2\sqrt{\frac{2}{3}}$, $2\sqrt{\frac{2}{3}}$ j) $\frac{-1-\sqrt{5}}{26}$,$\frac{-1+\sqrt{5}}{26}$ k) $-3a$, $-a$ l) $-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$, $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$ m) $\frac{1}{6}$, 1.

exercice 51

Résoudre les équations suivantes :

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{7}{12} \quad (15) \qquad (3x-1)(2x+1)=9x^2-1 \quad (17)$$

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{24} \quad (16) \qquad \frac{x^2-x-1}{x+2}=2x+3 \quad (18)$$

corrigé

Première équation : $\frac{10}{7}$ et 5, deuxième équation : ± 7, troisième équation : 0 et $\frac{1}{3}$ et dernière équation : -1 et -7.

exercice 52

Résoudre rigoureusement les équations suivantes :

$$\sqrt{x^2-3}=5x-9 \quad (19) \qquad \sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}=1 \quad (20) \qquad \sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}=1 \quad (21)$$

corrigé

on a 2, $\emptyset$ et $-\frac{7}{4}$

exercice 53

Résoudre sans tableau de signes ni le moindre calcul les inéquations suivantes :

$$(3x-1)(x-5)<0 \quad (22)$$

$$(5-2x)(3+x)>0 \quad (23) \qquad \frac{2x+1}{x-5}\leq 0 \quad (24)$$

corrigé

$x\in]\frac{1}{3};5[$, $x\in]-3;\frac{5}{2}[$ et $x\in [-\frac{1}{2};5[$.

exercice 54

Résoudre les inéquations et systèmes d'inéquations suivants :

$$x^2+1>2x-3 \quad (25)$$

$$2x-1\leq x^2+4 \quad (26)$$

$$\frac{1}{x-1}<\frac{3}{x-2} \quad (27)$$

$$\frac{4}{x}+\frac{1}{x-2}\geq 1 \quad (28)$$

$$(x^2-5x+4)(x^2-4x+3)>0 \quad (29)$$

$$(x^2-5X+4)(x^2-9x+14\leq 0 \quad (30)$$

$$5\leq x^2-14x+50\leq 26 \quad (31)$$

$$0\leq\frac{(x-3)^2}{(x+1)^2}<1 \quad (32)$$

corrigé

Dans l'ordre :
- Toujours vrai
- Toujours vrai
- $]\frac{1}{2};1[\cup]2;+\infty[$
- $]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}[\cup]2;\frac{7+\sqrt{17}}{2}[$
- $]-\infty;3[\cup]4,+\infty[$
- $[1;2]\cup[4;7]$

– $[2;5]\cup[9;12]$
– $]1;+\infty[$
exercice 55
Résoudre les inéquations suivantes :

$$2x-\sqrt{x}-1<0 \qquad (33) \qquad\qquad x+1<\sqrt{x+4} \qquad (34) \qquad\qquad x-3\geq\sqrt{x^2-2x} \qquad (35)$$

corrigè
Dans l'ordre :
– $[0,1[$
– $[-4;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}[$
– Pas de solution.
exercice 56
Résoudre l'équation $x^4-4x^2-5=0$.
corrigé
On trouve deux solutions réelles $\pm\sqrt{5}$ et deux solutions complexes $\pm i$.
exercice 57
Résoudre successivement les équations suivantes :

$$(\ln x)^2-\ln x-42=0 \qquad (\ln x)^2-\frac{42}{(\ln x)^2}=1$$

corrigé
Pour la première, $\ln x=-6$ ou $\ln x=7$ soit $x=e^{-6}$ ou $x=e^{7}$. Pour la seconde, $x=e^{\sqrt{7}}$ ou $x=e^{-\sqrt{7}}$.
exercice 58
Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$a=(3+4i)(4-3i) \qquad b=(3-i)^2 \qquad c=(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$$
$$d=\frac{2}{1+i} \qquad e=\frac{1}{3-i\sqrt{2}} \qquad f=\frac{1}{i\sqrt{2}-1}$$
$$g=\frac{2-5i}{3+2i} \qquad h=\frac{6+3i}{1-2i} \qquad k=\frac{3i}{3+4i}$$
$$l=\frac{2}{1-2i}+\frac{3}{2+i} \qquad m=2i-\frac{3}{i-3}$$

exercice 59
Écrire en fonction du conjugué $\bar{z}$ de z le conjugué du nombre complexe Z :

$$Z=-2i+3z \qquad Z=3+i-2iz$$
$$Z=(2-iz)(2z-4+3i) \qquad Z=\frac{2i+1-iz}{5i+2z}$$

exercice 60
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z et donner les solutions sous forme algébrique :

$$iz=3+i \qquad (2-i)z-2i=iz+2-3i$$
$$(2iz+i)(4z-8-4i)=0 \qquad \frac{z-2i}{z+2}=4i$$
$$4\bar{z}+2i-4=0 \qquad (iz-2+i)(2i\bar{z}+i-2)=0$$
$$2z+i\bar{z}=4 \qquad 2iz-\bar{z}=4i$$

exercice 61
PLacer le nombre complexe $e^{i\alpha}$ dans le plan complexe. Démontrer que $e^{i\alpha}\times e^{i\alpha'}=e^{i(\alpha+\alpha')}$ et que $\frac{1}{e^{i\alpha}}=e^{-i\alpha}=\bar{e^{i\alpha}}$
exercice 62
Mettre sous forme algébrique, placer sur le cercle trigonométrique et écrire sous forme trigonométrique $e^{i\alpha}$ les nombres suivants :

$$a=e^{0i\pi} \qquad b=e^{\frac{2i\pi}{3}} \qquad c=e^{2i\pi} \qquad d=e^{i\pi} \qquad f=e^{-2i\pi} \qquad g=-e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$h=e^{-i\frac{\pi}{2}} \qquad j=-e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad k=ie^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \ell=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2} \qquad m=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

exercice 63

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Calculer ω^5. Montrer que $e^{-i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\frac{4\pi}{5}}$. Calculer $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7 \dots$ et remarquer que ω n'a que 5 puissances distinctes. Que vaut ω^{2016} ? Calculer de même $\omega^{-1}, \omega^{-2} \dots$.

corrigé

On a $\omega^5 = 1$. Et comme $2016 = 5 * 405 + 1$, $\omega^{2016} = \omega^{5^{405}} \times \omega = \omega$.

exercice 64

Même exercice avec $\omega' = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.

exercice 65

Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$a : x \mapsto e^{-\sqrt{x}} \qquad b : x \mapsto \frac{x+7}{4x+3} \qquad c : x \mapsto \frac{x^2+5}{x^3-1} \qquad d : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$$
$$e : x \mapsto \cos(x^2)e^{-x} \qquad f : x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{\ln x} \qquad g :\mapsto (2+\sin x)x$$

corrigé

Dans l'ordre : $\lim_{x\to+\infty} a(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} b(x) = \frac{1}{4}$, $\lim_{x\to+\infty} c(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} d(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} e(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

exercice 66

Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$g_1(x) = \frac{x+3}{2-x} \qquad g_2(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1} \qquad g_3(x) = \frac{x^2-3x+1}{-x^2+x-1}$$
$$g_4(x) = \frac{x+\ln(x)}{2x-\ln(x)} \qquad g_5(x) = \frac{2e^x-x}{e^x+1}$$

corrigé

Les solutions sont les suivantes : $g_1 : -1$, $g_2 : 0$ $g_3 : -1$, $g_4 : \frac{1}{2}$, $g_5 : 2$.

exercice 67

Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2+x^3+3\ln x+e^{-x}}{x^4+\cos(x)-1} \qquad f_2(x) = \frac{50x+x\ln x}{x\ln x+3}$$
$$f_3(x) = \frac{e^{-x}+\sqrt{x}+e^x+\cos x}{x^{20}+2x^{2016}} \qquad f_4(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln x}$$
$$f_5(x) = \frac{e^x-1}{x^6+2e^x+e^{\frac{x}{2}}} \qquad f_6(x) = e^{-3\sqrt{x}+x-\ln(x^2+1)+\cos x}$$
$$f_7(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \qquad f_8(x) = \ln(e^{2x}+1)-2x)$$

corrigé

On a dans l'ordre $f_1 : 0$, $f_2 : 1$, $f_3 : +\infty$, $f_4 : 1$, $f_5 : \frac{1}{2}$, $f_6 : +\infty$,$f_7 : \frac{1}{2}$, $f_8 : 0$

exercice 68

Justifier la dérivabilité et calculer les dérivées suivantes en utilisant la formule de la dérivée de u^α et non pas celle de $\frac{1}{u}$.

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$

$f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^4}$

$f : x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^3}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^4}$

corrigé

Les 4 premières sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et

$f' : x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$; $f' : x \mapsto \dfrac{-2}{x^3}$; $f' : x \mapsto \dfrac{-3}{x^4}$; $f : x \mapsto \dfrac{-4}{x^5}$.

Les 4 suivantess sont dérivables sur $R \setminus \{1\}$ et

$f' : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$; $f' : x \mapsto \dfrac{2}{(1-x)^3}$; $f' : x \mapsto \dfrac{3}{(1-x)^4}$; $f' : x \mapsto \dfrac{4}{(1-x)^5}$

Les 4 dernères sont dérivables sur $R \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ et

$f' : x \mapsto \dfrac{-2}{(2x+1)^2}$; $f' : x \mapsto \dfrac{-4}{(2x+1)^3}$; $f' : x \mapsto \dfrac{-6}{(2x+1)^4}$; $f' : x \mapsto \dfrac{-8}{(2x+1)^5}$

exercice 69

Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée des les fonctions suivantes ; mettre le résultat sous une forme propice à une éventuelle étude de signe

$f_1 : x \mapsto (x-1)^3;$	$f_2 : x \mapsto (x^2-1)^3;$	$f_3 : x \mapsto 3x^2-6x+1;$
$f_4 : x \mapsto (x-1)(x-2);$	$f_5 : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+3};$	$f_6 : x \mapsto \dfrac{3-x}{2+x};$
$f_7 : x \mapsto \dfrac{3x+1}{1-x};$	$f_8 : x \mapsto 3x^2 - \dfrac{1}{x};$	$f_9 : x \mapsto (x-2)(3+x)(x-4);$
$g_1 : x \mapsto \dfrac{3x^2-2x+1}{-x+2};$	$g_2 : x \mapsto \dfrac{3x^2-2x+3}{x^2-x+2};$	$g_3 : x \mapsto \sqrt{2x-3};$
$g_4 : x \mapsto \sqrt{x^2-2x+5};$	$g_5 : x \mapsto^5 \sqrt{x^2+1};$	$g_6 : x \mapsto \dfrac{1}{-x+2};$
$g_7 : x \mapsto \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right);$	$g_8 : x \mapsto sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right);$	$g_9 : x \mapsto \sin(2x)\cos(x);$
$h_1 : x \mapsto 6\cos^2 x - 6\cos(x) - 9;$	$h_2 : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\cos^2 x};$	$h_3 : x \mapsto 2\sin(x)\cos(x)$ $+ \cos(x) + \sin(x)$
$h_4 : x \mapsto \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x\sin(x)+\cos(x)};$	$h_5 : x \mapsto \ln(5x-1);$	$h_6 : x \mapsto \ln(x^2+1)$
$h_7 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right);$	$h_8 : x \mapsto \ln(\ln(x));$	$h_9 : x \mapsto \ln\lvert 7-2x\rvert$
$u_1 : x \mapsto x\ln(x) - x;$	$u_2 : x \mapsto e^{3x};$	$u_3 : x \mapsto e^{x^2-x+1}$
$u_4 : x \mapsto e^{sin(x)};$	$u_5 : x \mapsto \dfrac{e^x+1}{e^x-1};$	$u_3 : x \mapsto e^{x\ln(x)}$
$u_7 : x \mapsto xe^{\frac{1}{x}};$	$u_8 : x \mapsto \ln(e^{2x} - e^x + 1);$	$u_9 : x \mapsto \dfrac{x}{1+e^{-x}}$
$v_1 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1};$	$v_2 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}};$	
$v_3 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+sin(x)}{1-sin(x)}};$	$v_4 : x \mapsto tan2x$	

corrigé

$f_1' : x \mapsto 3(x-1)^2$; $f_2' : x \mapsto 6x(x^2-1)^2$; $f_3' : x \mapsto 6(x-1)$;

$f_4' : x \mapsto 2x-3$; $f_5' : x \mapsto \dfrac{2}{(x+3)^2}$; $f_6' : x \mapsto -\dfrac{5}{(2+x)^2}$;

$f_7' : x \mapsto \dfrac{4}{(1-x)^2}$; $f_8' : x \mapsto 6x+\dfrac{1}{x^2}$; $f_9' : x \mapsto -3x^2+18x-26$;

$g_1' : x \mapsto -3\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$; $g_2' : x \mapsto \dfrac{x^2-2x-1}{(x^2-x+2)^2}$; $g_3' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$;

$g_4' : x \mapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; $g_5' : x \mapsto \dfrac{2}{5}\dfrac{x}{(x^2+1)^{\frac{4}{5}}}$; $g_6' : x \mapsto \dfrac{1}{(-x+2)^2}$;

$g_7' : x \mapsto -2sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$; $g_8' : x \mapsto -2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$; $g_9' : x \mapsto 2\cos(2x)\cos(x)-\sin(2x)\sin(x)$;

$h_1' : x \mapsto -6\sin(x)(2\cos(x)-1)$; $h_2' : x \mapsto \dfrac{-\sin^3(x)}{(1+\cos^2 x)^2}$; $h_3' : x \mapsto 4\cos^2(x)+\cos(x)-\sin(x)-2$

$h_4' : x \mapsto \dfrac{x^2}{x\sin(x)+\cos(x)^2}$; $h_5' : x \mapsto \dfrac{5}{5x-1}$; $h_6' : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$

$h_7' : x \mapsto \dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$; $h_8' : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$; $h_9' : x \mapsto \dfrac{2}{7-2x}$

$u_1' : x \mapsto \ln x$; $u_2' : x \mapsto 3e^{3x}$; $u_3' : x \mapsto (2x-1)e^{x^2-x+1}$

$u_4' : x \mapsto \cos x e^{\sin(x)}$; $u_5' : x \mapsto -2\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$; $u_6' : x \mapsto (1+\ln x)e^{x\ln(x)}$

$u_7' : x \mapsto (1-\dfrac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}$; $u_8' : x \mapsto \dfrac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}$; $u_9' : x \mapsto \dfrac{1+e^{-x}+xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

$v_1' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$; $v_2' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}(x+1)^{\frac{3}{2}}}$;

$v_3' : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin(x)}(1-\sin(x))^{\frac{3}{2}}}$; $v_4' : x \mapsto \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

exercice 70

Déterminer l'ensemble des primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.

corrigé

$x \longmapsto \ln(-x)+C\,;\ C \in \mathbb{R}$.

exercice 71

Déterminer les primitives des fonctions suivantes puis dériver afin de contrôler le résultat.

$f : x \mapsto x^{16}-35x^{13}+14x^{11}-3x^8+20x^4+56x^3+51x^2+18x+1$;

$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$;

$g_1 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$; $g_2 : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$; $g_3 : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$ $g_4 : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^4}$;

$h_1 : x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}$; $h_2 : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2}$; $h_3 : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^3}$ $h_4 : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^4}$;

corrigé

A une constante additive près on trouve :

$f : x \mapsto \frac{1}{17}x^{17}-\frac{5}{2}x^{14}+\frac{7}{6}14x^{12}-\frac{1}{3}x^9+4x^5+\frac{14}{2}x^4+17x^3+9x^2+x$;

$F_1 : x \mapsto ln|x|$; $F_2 : x \mapsto \dfrac{-1}{x}$; $F_3 : x \mapsto \dfrac{-1}{2x^2}$ $F_4 : x \mapsto \dfrac{-1}{3x^3}$;

$G_1 : x - \mapsto ln|1-x|$; $G_2 : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)}$; $G_3 : x \mapsto \dfrac{1}{2(1-x)^2}$ $G_4 : x \mapsto \dfrac{1}{3(1-x)^3}$;

$H_1 : x \mapsto \dfrac{1}{2}ln|2x+1|$; $H_2 : x \mapsto \dfrac{-1}{2(2x+1)}$; $H_3 : x \mapsto \dfrac{-1}{4(2x+1)^2}$ $H_4 : x \mapsto \dfrac{-1}{6(2x+1)^3}$;

exercice 72

Déterminer les primitives des fonctions suivantes puis dériver afin de contrôler le résultat.

$a) : x \mapsto 4x^2 - 5x + \dfrac{1}{x^2}$; $b) : x \mapsto x(2x^2+1)^4$; $c) : x \mapsto (x-1)^3$

$d) : x \mapsto (x^2-1)^3$; $e) : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $f) : x \mapsto \sqrt{x}+1$;

$g) : x \mapsto \sin 2x$ $h) : x \mapsto \cos 3x$; $i) : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

$j) : x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x)}$; $k) : x \mapsto 2x(x^2-1)^5$ $l) : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+2)^2}$;

$m) : x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$; $n) : x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$; $o) : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3-1}$

$p) : x \mapsto e^{2x}$; $q) : x \mapsto \dfrac{e^x}{5e^x+1}$; $r) : x \mapsto e^{2x}\sqrt[3]{1+e^{2x}}$;

$s) : x \mapsto \tan x$ $t) : xe^{x^2}$; $u) : x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$;

$v) : x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$; $w) : x \mapsto \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$ $x) : -\sqrt{e^x}$;

$y) : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$; $z) : x \mapsto \sin x \, e^{\cos x}$ $\alpha) : x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2}$

$\beta) : \dfrac{e^x}{(1+2e^x)^{\frac{3}{2}}}$; $\gamma) : x \mapsto \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$.

corrigé

$a) : x \mapsto \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - \dfrac{1}{x}$; $b) : x \mapsto \dfrac{1}{20}(2x^2+1)^5$; $c) : x \mapsto \dfrac{1}{4}(x-1)^4$

$d) : x \mapsto \dfrac{1}{7}x^7 - \dfrac{3}{5}x^5 + x^3 - x$; $e) : x \mapsto -\dfrac{1}{x} - 2\sqrt{x}$; $f) : x \mapsto \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x$;

$g) : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos 2x$ $h) : x \mapsto \dfrac{1}{3}\sin 3x$; $i) : x \mapsto x - tanx$;

$j) : x \mapsto \dfrac{1}{2}ln|x^2+2x|$; $k) : x \mapsto \dfrac{1}{6}(x^2-1)^6$ $l) : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x^2+2)}$;

$m) : x \mapsto ln|x-3|$; $n) : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2+x+3}$; $o) : x \mapsto \dfrac{1}{3}ln|x^3-1|$

$p) : x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{2x}$; $q) : x \mapsto \dfrac{1}{5}\ln(e^x+1)$; $r) : x \mapsto \dfrac{3}{8}(1+e^{2x})^{\frac{4}{3}}$;

$s) : x \mapsto -\ln|\cos x|$ $t) : \dfrac{1}{2}e^{x^2}$; $u) : x \mapsto 2e^{\sqrt{x}}$;

$v) : x \mapsto \dfrac{15}{2}x^{\frac{2}{3}}$; $w) : x \mapsto -\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ $x) : -2\sqrt{e^x}$;

$y) : x \mapsto \ln(1+e^x)$; $z) : x \mapsto -e^{\cos x}$ $\alpha) : x \mapsto -\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$\beta) : -\dfrac{1}{\sqrt{1+2e^x}}$; $\gamma) : x \mapsto ln|\cos x + \sin x|$.

exercice 73

Calculer les intégrales suivantes :

$I1 = \int_{10}^{20} \frac{dv}{v}$; $I2 = \int_0^1 e^{-2t}dt$; $I3 = \int_{10^{-5}}^{10^{-2}} \frac{dp}{2p}$; $I4 = \int_{275}^{315} \frac{2dT}{T}$; $I5 = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega t + \varphi)dt$.

corrigé

$I1 = ln2$; $I2 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$; $I3 = \frac{3}{2}\ln 10$; $I4 = 2ln\frac{63}{55}$; $I5 = 0$

exercice 74

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. La fonction uv est une primitive de la fonction $u'v + uv'$. Toutes les fonctions mises en jeu sont continues donc leurs intégrales existent. Pour tout couple (a, b) d'éléments de I, on a :

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = [u(x)v(x)]_a^b.$$

. Par liinéarité de l'intégrale on peut réécrire cela sous la forme :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Cette formule s'appelle la *formule d'intégration par parties* et permet de calculer des intégrales lorsque l'on n'a pas accès à la primitive directement. Par exemple pour calculer $\int_1^3 xe^x dx$, on pose $u(x) = x$; $v'(x) = e^x$; Donc $u'(x) = 1$; $v(x) = e^x$. En appliquant la formule d'intégration par partie, on obtient : $\int_1^3 xe^x dx = [xe^x]_1^3 - \int_1^3 1e^x dx = 3e^3 - 1e^1 - [e^x]_1^3 = 2e^3$.

Calculer de même :

$$\int_1^3 x\cos x dx \qquad \int_0^1 x\sin x dx \qquad \int_1^3 x\ln x dx$$

En utilisant deux intégrations par parties successives :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}\cos x dx$$