Bienvenu en C.P.G.E. du lycée Descartes.

Chers futurs étudiants,
Vous avez été admis au Lycée Descartes : toute l'équipe pédagogique sera ravie de vous recevoir à la rentrée.

Les clés de la réussite en CPGE sont le travail et l'organisation. Si vous suivez les conseils de ce fascicule, vous aurez tous les outils pour démarrer l'année sur de bonnes bases. Il est important que vous preniez un peu de temps pour vous après votre baccalauréat, mais il est aussi important, pour une bonne réussite, de se préparer à l'entrée en CPGE.

Alors bonnes vacances et rendez-vous en septembre.

Les disciplines scientifiques (sciences-physiques, chimies, mathématiques, SI) seront vos matières principales. Beaucoup de choses seront revues de la terminale surtout lors de la première période.

Cependant, un des points essentiels qu'il faut acquérir rapidement sont les savoir-faire en calcul. Une grande différence apparaîtra dès le début de l'année entre les élèves sur la base de ces capacités en calcul : il faut notamment savoir poser, rédiger, à l'écrit, correctement un calcul et acquérir au fil de l'année de la rapidité.

Pour vous aider dans votre préparation, vous trouverez en fin de livret un ensemble d'exercices, allant jusqu'au niveau terminale S avec leur corrigé, que vous devriez savoir faire en arrivant le premier jour. Nous vous encourageons évidemment à chercher ces exercices pendant vos vacances. Une petite précision : la calculatrice ne sera que très très rarement autorisée lors des devoirs de mathématiques, comme lors des concours d'ailleurs. Donc vous devrez connaître vos formules, et notamment toutes les formules de trigonométrie, de puissance, sur les fonctions exponentielle et logarithme ($exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)...$) Si vous les connaissez en arrivant en septembre, ce sera toujours cela de moins à travailler pendant l'année. Il n'est pas utile de chercher à prendre de l'avance : consolider les bases de calcul du lycée est la priorité.

Fiche d'exercices de calculs.

Exercice 1 Calculer de deux façons

$$A = \left(-\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + 1\right) - \left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{5} - 2\right) + \left(-2 + \frac{4}{5}\right)$$

— en calculant d'abord chaque parenthèse
— en supprimant les parenthèses et en regroupant les termes qui donnent un résultat simple.

,

Exercice 2
Calculer :
— $A = ((a-c) - (a-b)) - ((b-c) - (a+c))$
— $B = \left(1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)\right) - \left(1 - \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{4}\right)\right) - \left(1 - \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4}\right)\right)$.
— $C = \left(-1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right) \times (-4)$
— $D = \left(\frac{4}{9} - \frac{11}{27}\right)\left(2 - \frac{4}{3}\right)$
— $E = \dfrac{3 - \frac{2}{5} + \frac{3}{4}}{2 + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}}$

,

Exercice 3
Rappels : Pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ avec $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \qquad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}.}$$

Rédaction : Dans vos calculs, vous devez impérativement marquer en plus grand la barre de fraction principale et bien écrire le symbôle = en face de cette barre de fraction.

Exprimer en une seule fraction :

$$A=\dfrac{1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}{1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}}\quad B=\dfrac{1}{\frac{1}{a}}\quad C=\dfrac{\frac{1}{a}}{a}\quad D=\dfrac{1+\frac{a}{b}}{\frac{b}{a}}\quad E=\dfrac{1+\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}}\quad F=\dfrac{\dfrac{1}{a+b}}{a}\quad G=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$$

Exercice 4

Rappels :

Pour tout$(a,b)\in(\mathbb{R}^+)^2$,
$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b\neq 0)$
$\sqrt{a^2}=a$ si $a\geq 0$; $\sqrt{a^2}=-a$ si $a\leq 0$
$(\sqrt{a})^2=a$
$a\geq b\Longleftrightarrow a^2\geq b^2$

Comparer les nombres suivants, sans utiliser la calculatrice :
$3\sqrt{2}$ et $\sqrt{17}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ et 3 ; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ et 5 ; $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ et $\frac{1}{2}$ $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ et $\sqrt{11}$.

Rédaction Soit par exemple à comparer $2\sqrt{2}+1$ et $\frac{5}{2}$. On a :
$(2\sqrt{2}+1)^2=8+4\sqrt{2}+1=9+4\sqrt{2}$ et $\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$.
On a : $9+4\sqrt{2}\geq\dfrac{25}{4}\Longleftrightarrow 36+16\sqrt{2}\geq 25\Longleftrightarrow 16\sqrt{2}\geq -11$
Cette dernière inégalité est vraie. Par conséquent, l'inégalité $9+4\sqrt{2}\geq\dfrac{25}{4}$ est vraie donc on a $(2\sqrt{2}+1)^2\geq\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Comme $2\sqrt{2}+1\geq 0$ ainsi que $\dfrac{5}{2}$ on a $2\sqrt{2}+1\geq\dfrac{5}{2}$. (il faut comprendre que l'on utilise la croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ dans la dernière étape.)

Exercice 5

Exprimer sans racine carrée (ou avec strictement moins) :

$\sqrt{(-5)^2}$ $\qquad\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ $\qquad\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

$\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ $\qquad\sqrt{(3-\pi)^2}$ $\qquad\sqrt{(3-a)^2}$ selon les valeurs de a

.

Exercice 6

Méthode : Pour rendre rationnel un dénominateur, on utilise l'identité $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.
Ainsi : $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4-2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$
Ecrire aussi simplement que possible :

$(2\sqrt{5})^2$ $\qquad(2+\sqrt{5})^2$ $\qquad(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$

$\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ $\qquad\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ $\qquad\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ $\qquad\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Exercice 7

Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes :

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \qquad \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \qquad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$
$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \qquad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

Exercice 8
Rappels Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{a}=\sqrt{b} \Longleftrightarrow a=b \\ \sqrt{a}=b \Longleftrightarrow a=b^2\end{array}}$$

Vérifier les égalités suivantes : (il faut utiliser les identités remarquables, elles sont rappelées à l'exercice 16).
$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$, $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$, $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$, $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Exercice 9
Définition du factoriel : Soit n un entier naturel

$$\boxed{\begin{array}{l}0! = 1 \\ 1! = 1 \\ \text{si } n \geq 2,\ n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n\end{array}}$$

— Simplifier $\frac{12!}{8!}$, $\frac{12!}{3!10!}$, $\frac{1}{9!} - \frac{1}{10!}$
— Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b deux réels strictement positifs, simplifier

$$A_n = \frac{(n+3)!}{(n+1)!}, \quad B_n = \frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}, \quad C_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ où } u_n = \frac{a^n}{n!b^{2n}}$$

Exercice 10
Rappels : pour n et m entiers relatifs, a et b nombres complexes

$$\boxed{\begin{array}{l}a^n \times a^m = a^{m+n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ (} a \text{ étant ici non nul)} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n} \text{(} b \text{ étant ici non nul).}\end{array}}$$

Développez, regrouper, réduire.
$A = (7xy)^3$, $B = (2a^2b^3)^5$, $C = \left[\left(\frac{-a}{b}\right)^3\right]^2 \times \left[(-b)^2\right]^3$, $D = xy \times \left(\frac{-2}{3}\right) x^2 \times \frac{3}{4} y^2$,
$E = \left(\frac{2}{7}\right) a^2 \times \left(\frac{-3}{4}\right) xy^3 \times \left(\frac{-2}{5}\right) a^2 x$, $F = \left(\frac{-3}{5}\right) a^2 . \left(\frac{2}{3}\right) b^2 x.(-x)^4$, $G = 4x^3.(-3y^2). \left(\frac{-5}{6}\right) a^2 x^2 y^5$.

Exercice 11
Simplifier :

$A = \frac{4^{12}}{2^{25}}$; $B = \frac{3}{2}\frac{2^n}{3^{n+1}}$; $E = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$F = (-1)^3 \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\frac{1}{14}\right)$

$G = 77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7 \times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times (7^{-9})^{-3} \times \frac{1}{(-11)^{-3}}$

$K = (a^{n^2})^2; \quad L = \dfrac{a^{n^2}}{a^n}; \quad M = a^{3n}(a^n)^3; \quad P = (a^n)^n.$

Exercice 12

Réduire et ordonner les polynômes suivants :

$P(x) = 7x^3 + 8x - 3 + 4x - 2x^3 - 5x + 2$

$Q(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{5}{4}x - 3x^2 + \dfrac{x}{6} - \dfrac{5}{2}x^2 + 5 + 4x^2$

$R(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + xy + y^2 - 2xy + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{3}{2}x^2$

$S(a) = 4a^2 - \dfrac{2}{3}a - \dfrac{2}{5}a^2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}a - 5a + \dfrac{2}{15}a^2 - \dfrac{3}{4}$

$T(x) = 4x^2 - \dfrac{7}{2} + \dfrac{3}{5}x - \dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 - 5 + \dfrac{3}{2}x^3 + 7 - 2x$

Exercice 13

Former les polynômes $A + B + C$; $A - B + C$; $A + B - C$; $-A + B + C$ avec

$A = 3x^2 - 4x + 5$ $\qquad B = 2x^2 + 4 - 5x$ $\qquad C = 3 - x + 4x^2$

Exercice 14

Même question avec

$A = 5a^2 - 3ab + 7b^2$ $\qquad B = 9b^2 - 8ab + 6a^2$ $\qquad C = -7b^2 - 3ab + 4a^2$

Exercice 15

Effectuer les produits suivants, réduire et ordonner les résultats :

$A = (4x^5 + 7 - 2x^3)(x^3 - 2x)$ $\qquad B = (5x^3 - 2x)(3x - 4x^2)$

$C = (7x^4 - 2x^3 + 4x^2)(3x^2 - 5)$ $\qquad D = (2x^2 - 4 + 2x)(x^2 + 5 - 2x)$

$E = (2x - 7x^2 + 5x^3)(3x - 5x^2 + 8)$ $\qquad F = \left(\dfrac{5}{4}x^3 - 2x + \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{7}{2}x^3 - 2x + \dfrac{1}{2}\right)$

$G = (3x^2 - 1)(x + 1)(x - 1)$ $\qquad H = (4x^3 - 7x + 2x^2 + 5)^2$

Exercice 16

Rappels : pour tout a et b nombres complexes

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
On a aussi $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$(vérifier cette égalité.)
On a aussi $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$(vérifier cette égalité.)

Démontrer que pour tous réels a, b, c, on a les égalités :

$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)((b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2) \end{aligned}$$

Exercice 17

Factoriser :

$A = x^2 - 2x + 1$ $\qquad B = x^2 + x + \dfrac{1}{4}$ $\qquad C = 4x^2 - 4x + 1$

$D = a^2 + 4a + 4$ $\qquad E = 4x^3 + 8x^2y + 4xy^2$ $\qquad F = (x + y)^3 - x^3 - y^3$

$G = (x - y)^3 - x^3 + y^3$ $\qquad H = x^3 + 27y^3$ $\qquad K = 8a^3 - 125$

Exercice 18

Utiliser les identités remarquables pour développer les produits suivants :

$$A = \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{2}{5}y^2\right)^2 \qquad B = \left(\frac{4}{3}x^5 + \frac{2}{5}y^3\right)^2$$

$$C = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{4}y\right)\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{4}y\right) \qquad D = \left(\frac{2}{3}a^2x^3 - \frac{1}{2}b^4\right)\left(\frac{2}{3}a^2x^3 + \frac{1}{2}b^4\right)$$

$$E = (3x+4y-5)(3x+4y+5) \qquad F = \left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y - 1\right)\left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y + 1\right)$$

$$G = (3x+4y-2z)^2 \qquad H = \left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}y + z\right)^2$$

Exercice 19

Compléter de façon à obtenir une expression de la forme $(T+U)^2$

$$A = x^2 + \cdots + 16 \qquad B = x^2 - \cdots + 9a^2$$

$$C = 4x^2 - 4x + \cdots \qquad D = 9x^2 + 6x + \cdots$$

$$E = x^2 + \cdots + y^4 \qquad F = 4a^2x^2 - \cdots + 1$$

Exercice 20

Factoriser :

$$A = \frac{5}{2}x^3y^2 - 5x^2y^2 + \frac{5}{2}xy^2 \qquad B = 18abx^2 - 12abx + 2ab$$

$$C = \frac{4}{5}a^3x^2 - 5a^3y^2 \qquad D = \frac{3}{4}a^2bx^2 - \frac{25}{3}a^2by^2$$

$$E = 25a^2x^4y^2 - 4b^2y^2 \qquad F = (2x-3)^2 - (3x-5)^2$$

$$G = (2x+3)^2 - 4(2x+3) \qquad H = (5x^2+3x-2)^2 - (4x^2-3x-2)^2$$

$$I = (3x-5)^2 + (3x-5)(2x+3) \qquad J = (a^2+b^2-2)^2 - (2ab-2)^2$$

$$K = a(x^2+1) - x(a^2+1) \qquad L = ab(x^2+y^2) + xy(a^2+b^2)$$

$$M = (a^2+b^2-10)^2 - (a^2-b^2-8)^2 \qquad N = (4a^2+b^2-9c^2)^2 - 16a^2b^2$$

Exercice 21

Simplifier les expressions suivantes, en admettant qu'elles sont définies :

$$A = \frac{7a^2x^5}{2b^2x^4} \qquad B = \frac{-2a^3b^2x}{3a^3bx^3} \qquad C = \frac{10a^2x^3y^2}{-4a^4x^3y}$$

$$D = \frac{x^2}{x^2-x} \qquad E = \frac{x^2+x^3}{x^3-x} \qquad F = \frac{6x^2}{9ax}$$

$$G = \frac{ax+by}{a^2x^2-b^2y^2} \qquad H = \frac{x^3-9x}{3x^2-9x} \qquad I = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$$

Exercice 22

Réduire le plus possible.

$$A = \frac{x+1}{6} + 2\frac{2x-1}{21} - \frac{3x+1}{14} \qquad B = \frac{x+2}{5} - \frac{4x+3}{15} - \frac{x+1}{3}$$

$$C = \frac{1}{a(a+1)} - \frac{1}{a(a-1)} + \frac{2a}{a^2-1} \qquad D = \frac{2}{2a+1} - \frac{1}{2a-1} + \frac{2}{4a^2-1}$$

$$E = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{x^2-3}{x^2-1} \qquad F = \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$$

$$G = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x^2-4} \qquad H = \frac{x-2}{x^2+2x} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$$

$$I = \frac{x^3}{x^3-x^2} + \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1} \qquad J = \frac{1}{x} + \frac{x-2}{x^2-4} - \frac{2}{x^2+2x}$$

Exercice 23

Pour a, b réels et n un entier naturel non nul, factoriser

$C = 16a^2 - 8a + 1$; $D = a^4 - 4a^2b^2 + 4b^4$; $F = a^2 + 2a^4 - b^2 - 2b^4$; $G = a^{2n} - 1$; $J = a^3 + 8 + (a+2)(2a-5)$;

$K=a^2-4b^2\,;\,L=4a^2+b^2-4ab\,;\,M=a^{2n}-4^n\,;\,P=(a+b)^2-4ab$

Rappel : Somme des termes d'une suite géométrique : pour tout q réel (ou complexe)

$$\boxed{1+q+q^2+...+q^n=\begin{cases}\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\,;\,si\,q\neq 1\\ n+1\,;\,si\,q=1\end{cases}}$$

Plus généralement si (u_n) est une suite géométrique de raison q, pour tout entier p et r :

$$\boxed{u_p+u_{p+1}+\cdots+u_r=\begin{cases}u_p\dfrac{1-q^{r-p+1}}{1-q}=1^{er}\text{ terme}\times\dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}\,;\,si\,q\neq 1\\ u_p(r-p+1)\,;\,si\,q=1\end{cases}}$$

Exercice 24

Calculer en fonction de n

$A_n=1+3+9+...+3^{2n}$

$B_n=-1+4-16+...+(-1)^{n-1}4^n$

$C_n=1-a^2+a^4-a^6+...+(-1)^na^{2n}$

$D_n=u_0+...u_n$ où $u_n=(-5)^{3n+1}$

Exercice 25

Calculer $A_n=9+27+...+3^{n+2}$.

Calculer de même $B_n=a^2+a^4+...+a^{2n}$ et $C_n=3^{n+2}+3^{n+3}+...+3^{2n+4}$.

Exercice 26

Rappels : pour tout réel strictement positifs x et y, pour tout entier relatif n,

$$\boxed{\begin{array}{l}ln(xy)=ln(x)+ln(y)\\ ln\left(\frac{1}{x}\right)=-ln(x)\\ ln\left(\frac{x}{y}\right)=ln(x)-ln(y)\\ ln(x^n)=nln(x)\\ ln(1)=0\\ ln(e)=1\end{array}}$$

Pour tout réel a et b,

$$\boxed{\begin{array}{l}e^{a+b}=e^ae^b\\ \frac{1}{e^a}=e^{-a}\\ \frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}\\ e^{na}=(e^a)^n\\ e^0=1\\ ln(e^a)=a\\ e^{ln(x)}=x.\end{array}}$$

Calculer les nombres suivants

1. en fonction de $\ln 2$:
   $\ln 16\,;\,\ln 512\,;\,\ln 0.125\,;\,\frac{1}{8}\ln\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{8}\,;\,\ln 72-2\ln 3$
2. en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:
   $\ln 36\,;\,\ln\frac{1}{12}\,;\,\ln 2.25\,;\,\ln 21+2\ln 14-3\ln 0.875$
3. en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$:
   $\ln 500\,;\,\ln\frac{16}{25}\,;\,\ln 6.25\,;\,\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\cdots+\ln\frac{98}{99}+\ln\frac{99}{100}$

Exercice 27

Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire que $\dfrac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2})-4\ln(\sqrt{2}+1)=\dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$

Exercice 28

Calculer y sachant que

$\ln y=\ln(7+5\sqrt{2})+8\ln(\sqrt{2}+1)+7\ln(\sqrt{2}-1)$

Exercice 29

Simplifier

$A=\ln((2+\sqrt{3})^{20})+\ln((2-\sqrt{3})^{20})\,;\,B=\ln(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2})+\ln(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$

Exercice 30

Simplifier les nombres suivants
$e^{3\ln 2}$; $\ln(\sqrt{e})$; $\ln(e^{\frac{1}{3}})$; $e^{-2\ln 3}$; $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$; $\ln(^5\sqrt{e})$
Remarque : On a, pour tout $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ et, si $a > 0$, $ln(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}ln(a)$.

Exercice 31

Simplifier les expressions suivantes :

$$a = e^{\ln 3 - \ln 2} \qquad b = e^{-\ln\frac{1}{2}} \qquad c = e^{-\ln\ln 2} \qquad d = \ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$$

$$f = \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2}) \qquad g = \ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$$

$$h = \exp\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$$

Exercice 32

Rédaction quant à la résolution d'une équation. En premier lieu, il faut toujours introduire l'inconnue et préciser dans quel ensemble appartient a priori cette inconnue ceci en écrivant "Soit $x \in \mathbb{R}$" si par exemple l'inconnue est dans $\mathbb{R}$. Ensuite il faut, si nécessaire, regarder pour quelle(s) valeur(s) de cette inconnue chacun des éléments de l'équation est défini. Enfin, il faut le plus possible résoudre cette équation par une succession d'équivalence.

Exemple : Résolvons l'équation (E) $2x + 5 = 4x + 3$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $(E) \iff 2x - 2 = 0 \iff \boxed{x = 1.}$
Autre exemple : (F) : $\frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{3}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Le discriminant de $x^2 - 5x + 6$ vaut 1. On a donc $x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = 2$ ou $x = 3$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$. On a : $(F) \iff 3x - 3 = x^2 - 5x + 6 \iff x^2 - 8x + 9 = 0$. Le discriminant de $x^2 - 8x + 9$ vaut 28. On a donc $(F) \iff x = \boxed{\sqrt{7} + 4 \text{ ou } x = -\sqrt{7} + 4.}$

Résoudre les équations suivantes :

$$\ln(-x - 5) = \ln(x - 61) - \ln(x + 7) \tag{1}$$

$$\ln(-x - 5) = \ln\left(\frac{x - 61}{x + 7}\right) \tag{2}$$

Exercice 33

Résoudre les inéquations suivantes (efforcez-vous de faire la rédaction complète et correcte comme montré ci-avant.) :

$$e^{3x-5} \geq 12 \quad (1) \qquad\qquad 1 \leq e^{-x^2+x} \quad (3)$$

$$e^{1+\ln x} \geq 2 \quad (2) \qquad\qquad e^{-6x} \leq \sqrt{e} \quad (4)$$

Exercice 34

Résoudre les équations suivantes :
(1) $3x = 4$ (2) $\frac{4}{x-3} = 2$ (3) $\frac{2x+3}{x-5} = \frac{4}{3}$ (4) $\frac{3}{x-\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}-x}$

Exercice 35

Résoudre les équations suivantes :
(1) $5(2x - 3) - 4(5x - 7) = 19 - 2(x + 11)$; (2) $4(x + 3) - 7x + 17 = 8(5x - 3) + 166$;
(3) $17 - 14(x + 1) = 13 - 4(x + 1) - 5(x - 3)$ (4) $17x + 15(x - 1) = -1 - 14(3x + 1)$

Exercice 36

Résoudre les équations suivantes :
(1) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$ (2) $x(5x + 1)(4x - 3)(3x - 4) = 0$
(3) $x(x + 1) = x + 1$ (4) $(x + 5)(4x - 1) + x^2 - 25 = 0$
(5) $4x^2 - 49 = 0$ (6) $(x + 7)^2 - 81(x - 5)^2 = 0$
(7) $3x^3 - 12x = 0$ (8) $(3x + 1)(x - 3)^2 = (3x + 1)(2x - 5)^2$

Exercice 37

Résoudre les équations suivantes
a) $8x^2 - 6x + 1 = 0$ b) $x^2 - 10x + 16 = 0$ c) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{8})x + 4 = 0$
d) $x^2 - (a + 2)x + 2a = 0$ e) $x^2 + (1 + \pi)x + \pi = 0$ f) $-x^2 + 8x + 6 = 0$

g) $8x^2+6x+1=0$ h) $-x^2+6x=0$ i) $3x^2=8$
j) $169x^2+13x-1=0$ k) $x^2+4ax+3a^2=0$ l) $-12x^2+125=0$
m) $-6x^2+7x-1=0$

Exercice 38

Résoudre avec une rédaction correcte les équations suivantes : (il faut mettre sous le même dénominateur).
$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{7}{12}$, $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{24}$
$(3x-1)(2x+1)=9x^2-1$, $\frac{x^2-x-1}{x+2}=2x+3$

Exercice 39

Un exemple : Résolvons $\sqrt{x^2-5}=2x+4$. (E)

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $x^2-5\geq 0 \iff x\in]-\infty,-\sqrt{5}]\cup[\sqrt{5},+\infty[$ et $2x+4\geq 0\iff x\geq -2$. De plus, $-\sqrt{5}\leq -2$ car $5\geq 4$. Soit donc $x\in[\sqrt{5},+\infty[$. On a $(E)\iff x^2-5=4x^2+16x+16\iff 3x^2+16x+21=0\iff x=-3$ ou $x=-\dfrac{7}{3}$. Les deux valeurs obtenues sont inférieures à $\sqrt{5}$ donc à exclure. Ainsi (E) n'a pas de solution.

Résoudre rigoureusement les équations suivantes :
$\sqrt{x^2-3}=5x-9$ (1) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}=1$ (2) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}=1$ (3)

Exercice 40

Rappel : signe d'un trinôme du second degré

Pour tout $a\in\mathbb{R}^*$ pour tout $(b,c)\in\mathbb{R}^2$,
si l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions réelles x_1 et x_2,
ax^2+bx+c est du signe de $-a$ entre x_1 et x_2 et du signe de a sinon.
Si cette équation n'a pas de solution réelle ou n'a qu'une seule solution, ax^2+bx+c est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Une expression du type $\frac{ax+b}{cx+d}$ a le même signe que l'expression $(ax+b)(cx+d)$ et on utilise le résultat encadré ci-dessus.

Résoudre sans tableau de signes ni le moindre calcul les inéquations suivantes :
$(3x-1)(x-5)<0$ $(5-2x)(3+x)>0$ $\frac{2x+1}{x-5}\leq 0$

Exercice 41

Méthode : Lorsqu'il y a plusieurs fractions rationnelles dans une inéquation, il faut mettre sous le même dénominateur

Exemple : Résolvons : $\frac{1}{x+4}+\frac{x}{x+2}\geq 1$ (E).

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,-2\}$. On a $(E)\iff \frac{1}{x+4}+\frac{x}{x+2}-1\geq 0\iff \frac{-x-6}{(x+2)(x+4))}\geq 0$ A partir de là, on peut éventuellement établir un tableau de signe avec deux lignes seulement, (et non trois !) une pour le signe de $-x-6$, une pour $(x+2)(x+4)$. On obtient ensuite, $(E)\iff x\in]-\infty,-6]\cup]-4,-2[$.

Résoudre les inéquations et systèmes d'inéquations suivants :
$x^2+1>2x-3$ $2x-1\leq x^2+4$ $\frac{1}{x-1}<\frac{3}{x-2}$ $\frac{4}{x}+\frac{1}{x-2}\geq 1$
$(x^2-5x+4)(x^2-4x+3)>0$ $(x^2-5x+4)(x^2-9x+14)\leq 0$ $5\leq x^2-14x+50\leq 26$ $0\leq\frac{(x-3)^2}{(x+1)^2}<1$

Exercice 42

Résoudre les inéquations suivantes :
$2x-\sqrt{x}-1<0$ $x+1<\sqrt{x+4}$ $x-3\geq\sqrt{x^2-2x}$

Exercice 43

Résoudre l'équation $x^4-4x^2-5=0$.

Exercice 44

Résoudre successivement les équations suivantes :

$$(\ln x)^2-\ln x-42=0 \qquad (\ln x)^2-\frac{42}{(\ln x)^2}=1$$

Exercice 45

Rappel : valeur absolue.

Pour tout réel **positif** r et pour tout réel a, x et y, on a

$|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$.
$\sqrt{x^2} = |x|$.
$|x| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad -r \leq x \leq r$
$|x| \geq r \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -r \quad \text{ou} \quad x \geq r$
$|x-a| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad a-r \leq x \leq a+r$
$|x-a| \geq r \quad \Leftrightarrow \quad x \leq a-r \quad \text{ou} \quad x \geq a+r$
$|x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2$
$|x| \leq |y| \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq y^2$.

Résoudre les inéquations suivantes :
(1) $|x-3| \leq 4$ (2) $|2x+1| \geq 5$ (3) $|x+2| > -5$ (4) $|x-1| \leq |2x+3|$ (5) $|-2x+3| \leq 7$

Exercice 46

Simplifier, pour x non nul, l'expression $f(x) = xe^{\frac{1}{2}|\ln(x^2)|}$.

Rappels : pour tout u et v nombres réels

$cos(u) = cos(v) \Longleftrightarrow u = v + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$ ou $u = -v + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$.
$sin(u) = sin(v) \Longleftrightarrow u = v + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$ ou $u = \pi - v + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$.
$cos(u+2\pi) = cos(u) \quad sin(u+2\pi) = sin(u) \quad cos(-u) = cos(u) \quad sin(-u) = -sin(u)$
$sin(\pi-u) = sin(u) \quad sin(u+\pi) = -sin(u) \quad cos(u+\pi) = cos(\pi-u) = -cos(u)$
$sin(u+\frac{\pi}{2}) = sin(\frac{\pi}{2}-u) = cos(u) \quad cos(u+\frac{\pi}{2}) = -sin(u) \quad cos(\frac{\pi}{2}-u) = sin(u)$

Exercice 47

Résoudre les équations suivantes :
$\sin x = \sin(\pi - 3x)$ (1) $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(3x + \frac{\pi}{2})$ (2) $\cos 2x + \cos\frac{x}{2} = 0$ (3) $\cos\left(\frac{7\pi}{5} - x\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5} + 3x\right)$ (4)
$\cos x = \sin\frac{7x}{5}$ (5) $\cos 4x = \sin 7x$ (6) $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos 2x = 0$ (7) $\sin 2x + \cos 3x = 0$ (8)

Exercice 48

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \pi \leq x \leq 2\pi\end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases}\cos x = -\frac{1}{2}\\ 0 \leq x \leq \pi\end{cases}$$

Exercice 49

Rappels : formules de trogonométrie.

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,
$cos^2(a) + sin^2(a) = 1$
$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$
$cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$
$sin(a+b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a)$
$sin(a-b) = sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a)$
$sin(2a) = 2sin(a)cos(a)$
$cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a) = 2cos^2(a) - 1 = 1 - 2sin^2(a)$

En remarquant que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 50

Simplifier $\dfrac{\sin(2a)}{\sin(a)} - \dfrac{\cos(2a)}{\cos(a)}$.

Exercice 51

Calculer $\sin(x + \dfrac{\pi}{4})$ en fonction de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$;
En déduire la résolution des équations $\sin(x) + \cos(x) = 1$ puis $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$.

Exercice 52

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$a=(3+4i)(4-3i) \qquad b=(3-i)^2 \qquad c=(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$$
$$d=\frac{2}{1+i} \qquad e=\frac{1}{3-i\sqrt{2}} \qquad f=\frac{1}{i\sqrt{2}-1}$$
$$g=\frac{2-5i}{3+2i} \qquad h=\frac{6+3i}{1-2i} \qquad k=\frac{3i}{3+4i}$$
$$l=\frac{2}{1-2i}+\frac{3}{2+i} \qquad m=2i-\frac{3}{i-3}$$

Exercice 53

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z et donner les solutions sous forme algébrique :

(1) $iz=3+i$ (2) $(2-i)z-2i=iz+2-3i$

(3) $(2iz+i)(4z-8-4i)=0$ (4) $\frac{z-2i}{z+2}=4i$

(5) $4\bar{z}+2i-4=0$ (6) $((iz-2+i)(2i\bar{z}+i-2)=0$

(7) $2z+i\bar{z}=4$ (8) $2iz-\bar{z}=4i$

Exercice 54

Mettre sous forme algébrique, placer sur le cercle trigonométrique et, si ce n'est pas déjà le cas, écrire sous forme trigonométrique $e^{i\alpha}$ les nombres suivants :

$$a=e^{0i\pi} \qquad b=e^{\frac{2i\pi}{3}} \qquad c=e^{2i\pi} \qquad d=e^{i\pi} \qquad f=e^{-2i\pi} \qquad g=-e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$h=e^{-i\frac{\pi}{2}} \qquad j=-e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad k=ie^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \ell=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2} \qquad m=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 55

Rédaction pour les limites :

Bien distinguer les types de justifications pour les limites à savoir :

— par opérations algébriques (somme, quotient, produit), par exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+x+5=+\infty$

— par comparaison, par exemple pour déterminer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{2+cos(x)}e^x$, on peut procéder ainsi : pour tout $x\geq 0$, $\sqrt{2+cos(x)}\geq 1$ donc $\sqrt{2+cos(x)}e^x\geq e^x$. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^x=+\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{2+cos(x)}e^x=+\infty$.

— par encadrement, par exemple $-\frac{1}{x}\leq\frac{sin(x^2)}{x}\leq\frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{sin(x^2)}{x}=0$

— par composition (ce qui revient à effectuer un changement de variable), par exemple, pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^3}$ on peut rédiger ainsi : On pose $u(x)=x^3$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-u}=0$, donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x^3}=0$.

— par croissance comparées, par exemple $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0$

Rappels : limites par croissances comparées : pour tout $a\in\mathbb{R}^+$, pour tout $p\in\mathbb{N}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}}{x^n}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{ln^p(x)}{x^n}=0 \; \lim_{x\to-\infty}x^ne^{ax}=0 \qquad \lim_{x\to0}x^nln^px=0.}$$

Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes en calquant la rédaction comme expliquée ci-dessus.

$$a:x\mapsto e^{-\sqrt{x}} \qquad b:x\mapsto\frac{x+7}{4x+3} \qquad c:x\mapsto\frac{x^2+5}{x^3-1} \qquad d:x\mapsto\frac{\sin x}{x}$$
$$e:x\mapsto\cos(x^2)e^{-x} \qquad f:x\mapsto\frac{\ln(\ln(x))}{\ln x} \qquad g:\mapsto(2+\sin x)x$$

Exercice 56

Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$g_1(x)=\frac{x+3}{2-x} \qquad g_2(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1} \qquad g_3(x)=\frac{x^2-3x+1}{-x^2+x-1}$$
$$g_4(x)=\frac{x+\ln(x)}{2x-\ln(x)} \qquad g_5(x)=\frac{2e^x-x}{e^x+1}$$

Exercice 57
Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2+x^3+3\ln x+e^{-x}}{x^4+\cos(x)-1} \qquad f_2(x) = \frac{50x+x\ln x}{x\ln x+3}$$
$$f_3(x) = \frac{e^{-x}+\sqrt{x}+e^x+\cos x}{x^{20}+2x^{2016}} \qquad f_4(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln x}$$
$$f_5(x) = \frac{e^x-1}{x^6+2e^x+e^{\frac{x}{2}}} \qquad f_6(x) = e^{-3\sqrt{x}+x-\ln(x^2+1)+\cos x}$$
$$f_7(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \qquad f_8(x) = \ln(e^{2x}+1)-2x)$$

Exercice 58
Calculer les dérivées suivantes en précisant l'ensemble de dérivabilité.
$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$
$f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^4}$
$f : x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^3}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^4}$

Exercice 59
Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée des les fonctions suivantes; mettre le résultat sous une forme propice à une éventuelle étude de signe

$f_1 : x \mapsto (x-1)^3$; $f_2 : x \mapsto (x^2-1)^3$; $f_3 : x \mapsto 3x^2-6x+1$;
$f_4 : x \mapsto (x-1)(x-2)$; $f_5 : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+3}$; $f_6 : x \mapsto \dfrac{3-x}{2+x}$;
$f_7 : x \mapsto \dfrac{3x+1}{1-x}$; $f_8 : x \mapsto 3x^2-\dfrac{1}{x}$; $f_9 : x \mapsto (x-2)(3+x)(x-4)$;
$g_1 : x \mapsto \dfrac{3x^2-2x+1}{-x+2}$; $g_2 : x \mapsto \dfrac{3x^2-2x+3}{x^2-x+2}$; $g_3 : x \mapsto \sqrt{2x-3}$;
$g_4 : x \mapsto \sqrt{x^2-2x+5}$; $g_5 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$; $g_6 : x \mapsto \dfrac{1}{-x+2}$;
$g_7 : x \mapsto \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$; $g_8 : x \mapsto sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)$; $g_9 : x \mapsto \sin(2x)\cos(x)$;
$h_1 : x \mapsto 6\cos^2 x-6\cos(x)-9$; $h_2 : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\cos^2 x}$; $h_3 : x \mapsto 2\sin(x)\cos(x) + \cos(x)+\sin(x)$
$h_4 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)+\cos(x)}$; $h_5 : x \mapsto \ln(5x-1)$; $h_6 : x \mapsto \ln(x^2+1)$
$h_7 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$; $h_8 : x \mapsto \ln(\ln(x))$; $h_9 : x \mapsto \ln|7-2x|$
$u_1 : x \mapsto x\ln(x)-x$; $u_2 : x \mapsto e^{3x}$; $u_3 : x \mapsto e^{x^2-x+1}$
$u_4 : x \mapsto e^{sin(x)}$; $u_5 : x \mapsto \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$; $u_6 : x \mapsto e^{x\ln(x)}$
$u_7 : x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$; $u_8 : x \mapsto \ln(e^{2x}-e^x+1)$; $u_9 : x \mapsto \dfrac{x}{1+e^{-x}}$
$v_1 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$; $v_2 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$;
$v_3 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+sin(x)}{1-sin(x)}}$; $v_4 : x \mapsto \dfrac{sin(2x)}{cos(2x)}$

Exercice 60
Déterminer l'ensemble des primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Exercice 61

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur un ensemble convenable à déterminer.
$f : x \mapsto x^{16} - 35x^{13} + 14x^{11} - 3x^8 + 20x^4 + 56x^3 + 51x^2 + 18x + 1$;

$$\begin{array}{llll}
f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}; & f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}; & f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^3} & f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{x^4}; \\
g_1 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}; & g_2 : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}; & g_3 : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3} & g_4 : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^4}; \\
h_1 : x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}; & h_2 : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2}; & h_3 : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^3} & h_4 : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^4};
\end{array}$$

Exercice 62
Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll}
a) x \mapsto 4x^2 - 5x + \dfrac{1}{x^2}; & b) x \mapsto x(2x^2+1)^4; & c) x \mapsto (x-1)^3 \\
d) x \mapsto (x^2-1)^3; & e) x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}; & f) x \mapsto \sqrt{x} + 1; \\
g) x \mapsto \sin 2x & h) x \mapsto \cos 3x; & i) x \mapsto 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}; \\
j) x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x)}; & k) x \mapsto 2x(x^2-1)^5 & l) x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+2)^2}; \\
m) x \mapsto \dfrac{1}{x-3}; & n) x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}; & o) x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3-1} \\
p) x \mapsto e^{2x}; & q) x \mapsto \dfrac{e^x}{5e^x+1}; & r) x \mapsto e^{2x}\sqrt[3]{1+e^{2x}}; \\
s) x \mapsto \tan x & t) xe^{x^2}; & u) x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}; \\
v) x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}; & w) x \mapsto \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}} & x) - \sqrt{e^x}; \\
y) x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}; & z) x \mapsto \sin x\, e^{\cos x} & \alpha) x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2} \\
\beta) : \dfrac{e^x}{(1+2e^x)^{\frac{3}{2}}}; & \gamma) x \mapsto \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}. &
\end{array}$$

Exercice 63
Calculer les intégrales suivantes :
$I1 = \displaystyle\int_{10}^{20} \frac{dv}{v}$; $I2 = \displaystyle\int_0^1 e^{-2t} dt$; $I3 = \displaystyle\int_{10^{-5}}^{10^{-2}} \frac{dp}{2p}$; $I4 = \displaystyle\int_{275}^{315} \frac{2dT}{T}$; $I5 = \displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega t + \varphi) dt$.

Exercice 64 (complément.)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. La fonction uv est une primitive de la fonction $u'v + uv'$. Toutes les fonctions mises en jeu sont continues donc leurs intégrales existent. Pour tout couple (a, b) d'éléments de I, on a :

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = [u(x)v(x)]_a^b.$$

Par linéarité de l'intégrale on peut réécrire cela sous la forme :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Cette formule s'appelle la *formule d'intégration par parties* et permet de calculer des intégrales lorsque l'on n'a pas accès à la primitive directement. Par exemple pour calculer $\displaystyle\int_1^3 xe^x dx$, on pose $u(x) = x$;

$v'(x) = e^x$; Donc $u'(x) = 1$; $v(x) = e^x$. En appliquant la formule d'intégration par parties, on obtient : $\int_1^3 xe^x dx = [xe^x]_1^3 - \int_1^3 1e^x dx = 3e^3 - 1e^1 - [e^x]_1^3 = 2e^3$.

Calculer de même :

$$\int_1^3 x \cos x dx \qquad \int_0^1 x \sin x dx \qquad \int_1^3 x \ln x dx$$

En utilisant deux intégrations par parties successives :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \cos x dx$$

CORRIGÉ

Exercice 1
$\frac{19}{15}$

Exercice 2
$A = a + c, \quad B = \frac{29}{12}, \quad C = \frac{7}{5}, \quad D = \frac{2}{81}, \quad E = \frac{201}{128}.$

Exercice 3
$A = -\frac{17}{2}$, $B = a$, $C = \frac{1}{a^2}$, $D = \frac{a(a+b)}{b^2}$, $E = \frac{a+b}{a}$, $F = \frac{1}{a(a+b)}$, $G = \frac{ab}{a+b}$

Exercice 4
$3\sqrt{2} > 17$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} < 5$, $\sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}$, $\sqrt{5} + \sqrt{2} > \sqrt{11}$.

Exercice 5
$\sqrt{(-5)^2} = 5$, $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3} - 1$, $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = 2 - \sqrt{3}$ $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = \sqrt{7} - 2$, $\sqrt{(3-\pi)^2} = \pi - 3$, $\sqrt{(3-a)^2} = \begin{cases} a-3 & \text{si } a \geqslant 3 \\ 3-a & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 6

20	$9 + 4\sqrt{5}$	$12\sqrt{7}$
12	$\frac{27 - 10\sqrt{2}}{3}$	$50 - 25\sqrt{3}$
10	$2\sqrt{2}$	

Exercice 7

$\frac{4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$,$3 - 2\sqrt{2}$, $1 + \sqrt{15} - \sqrt{10}$, $\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2$, $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 3}{2}$

Exercice 8
On observe que les expressions de part et d'autre du signe égal sont de même signe puis on élève au carré. (Par exemple, on vérifie que $7 - 4\sqrt{3}$ est positif car $49 \geq 48$.)

Exercice 9
— $\frac{12!}{8!} = 12 \times 11 \times 10 \times 9$ $\quad \frac{12!}{3!10!} = \frac{12 \times 11}{6} = 22$, $\quad \frac{1}{9!} - \frac{1}{10!} = \frac{9}{10!} = \frac{1}{10 \times 8!} = \frac{1}{403200}$.
— $A_n = (n+3)(n+2)$, $B_n = \frac{1}{(n+1)!}$, $C_n = \frac{a}{(n+1)b^2}$.

Exercice 10
$A = 343x^3y^3$, $B = 32a^{10}b^{15}$, $C = a^6$, $D = -\frac{1}{2}x^3y^3$, $E = \frac{3}{35}a^4x^2y^3$, $F = -\frac{2}{5}a^2b^2x^5$, $G = 10a^2x^5y^7$.

Exercice 11
$A = \frac{1}{2}; \quad B = \frac{2^{n-1}}{3^n}; \quad E = \frac{3}{8}; \quad F = \frac{7}{2^8}; \quad G = -7^{18}11^8,\ K = a^{2n^2},\ L = a^{n(n-1)},\ M = a^{6n},\ P = a^{n^2}.$

Exercice 12
$P(x) = 5x^3 + 7x - 1$

$Q(x) = -3x^2 + \frac{17}{12}x + 5$

$R(x) = \frac{x^2}{3} - xy + y^2$

$S(a) = \frac{56}{15}a^2 - \frac{16}{3}a - \frac{1}{4}$

$T(x) = \frac{17}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{5}x - \frac{3}{2}$

Exercice 13

$A + B + C = 9x^2 - 10x + 12$
$A - B + C = 5x^2 + 4$
$A + B - C = x^2 - 8x + 6$
$-A + B + C = 3x^2 - 2x + 2$

Exercice 14

$A + B + C+ = 15a^2 - 14ab + 9b^2$
$A - B + C = 3a^2 + 2ab - 9b^2$
$A + B - C = 7a^2 - 8ab + 23b^2$
$-A + B + C = 5a^2 - 8ab - 5b^2$

Exercice 15

$A = 4x^8 - 10x^6 + 4x^4 + 7x^3 - 14x$ $\quad B = -20x^5 + 15x^4 + 8x^3 - 6x^2$
$C = 21x^6 - 6x^5 - 23x^4 + 10x^3 - 20x^2$ $\quad D = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 18x - 20$
$E = -25x^5 + 50x^4 + 9x^3 - 50x^2 + 16x$ $\quad F = \frac{35}{8}x^6 - \frac{19}{2}x^4 + \frac{19}{8}x^3 + 4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$
$G = 3x^4 - 4x^2 + 1$ $\quad H = 16x^6 + 16x^5 - 52x^4 + 12x^3 + 69x^2 - 70x + 25$

Exercice 16

Méthode : développer les expressions de gauche et vérifier ainsi que l'on trouve celles de droite.

Exercice 17

$A = (x - 1)^2$ $\quad B = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ $\quad C = (2x - 1)^2$
$D = (a + 2)^2$ $\quad E = 4x(x + y)^2$ $\quad F = 3xy(x + y)$
$G = 3xy(-x + y)$ $\quad H = (x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$ $\quad K = (2a - 5)(4a^2 + 10a + 25)$

Exercice 18

$A = \frac{9}{4}x^6 - \frac{6}{5}x^3y^2 + \frac{4}{25}y^4$ $\quad B = \frac{16}{9}x^{10} + \frac{16}{15}x^5y^3 + \frac{4}{25}y^6$
$C = \frac{4}{25}x^4 - \frac{9}{16}y^2$ $\quad D = \frac{4}{9}a^4x^6 - \frac{1}{4}b^8$
$E = 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 25$ $\quad F = \frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{25}y^2 - \frac{8}{5}y - 1$
$G = 9x^2 + 24xy - 12xz + 16y^2 - 16yz + 4z^2$ $\quad H = \frac{25}{4}x^2 - \frac{15}{4}xy + 5xz + \frac{9}{16}y^2 - \frac{3}{2}yz + z^2$

Exercice 19

$A = x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ $\quad B = x^2 - 6ax + 9a^2 = (x - 3a)^2$
$C = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$ $\quad D = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$
$E = x^2 + 2xy^2 + y^4 = (x + y^2)^2$ $\quad F = 4a^2x^2 - 4ax + 1 = (2ax - 1)^2$

Exercice 20

$A = \frac{5}{2}xy^2(x - 1)^2$ $\quad B = 2ab(3x - 1)^2$
$C = \frac{1}{5}a^3(2x - 5y)(2x + 5y)$ $\quad D = \frac{1}{12}a^2b(3x - 10y)(3x + 10y)$
$E = y^2(5ax^2 - 2b)(5ax^2 + 2b)$ $\quad F = -(5x - 8)(x - 2)$
$G = (2x + 3)(2x - 1)$ $\quad H = x(3x + 2)(x + 6)(3x - 2)$
$I = (5x - 2)(3x - 5)$ $\quad J = (a + b + 2)(a + b - 2)(a - b)2$
$K = (ax - 1)(-a + x)$ $\quad L = (ax + by)(ay + bx)$
$M = 4(b - 1)(b + 1)(a - 3)(a + 3)$ $\quad N = (2a + b - 3c)(2a + b + 3c)(2a - b + 3c)(2a - b - 3c)$

Exercice 21

$$A=\frac{7}{2}\frac{a^2x}{b^2}\qquad B=-\frac{2}{3}\frac{b}{x^2}\qquad C=-\frac{5}{2}\frac{y}{a^2}$$
$$D=\frac{x}{x-1}\qquad E=\frac{x^2+x}{x^2-1}\qquad F=\frac{2x}{3a}$$
$$G=\frac{1}{ax-by}\qquad H=\frac{1}{3}(x+3)\qquad I=\frac{x+1}{x-1}$$

Exercice 22

$A=\dfrac{x}{7}$ $B=\dfrac{-6x-2}{15}$ $C=\dfrac{2}{a}$; $D=\dfrac{1}{2a+1}$; $E=\dfrac{x-1}{x+1}$; $F=\dfrac{x}{x+1}$; $G=\dfrac{1}{x+2}$; $H=\dfrac{-x-4}{x^2+2x}$; $I=\dfrac{2x}{x+1}$; $J=\dfrac{2}{x+2}$

Exercice 23

$C=(4a-1)^2$; $D=(a^2-2b^2)^2$;
$F=(a^2-b^2)+2(a^4-b^4)=(a^2-b^2)+2(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a^2-b^2)(1+2a^2+2b^2)$;
$G=(a^n)^2-1^2=(a^n-1)(a^n+1)$;
$J=(a+2)(a^2-2a+4)+(a+2)(2a-5)=(a+2)(a-1)(a+1)$;
$K=(a-2b)(a+2b)$;
$L=(2a-b)^2$;
$M=(a^n-2^n)(a^n+2^n)$;
$P=(a-b)^2$

Exercice 24

$A_n=\dfrac{3^{2n+1}-1}{2}$; $B_n=\dfrac{-1+(-4)^{n+1}}{5}$; $C_n=\dfrac{1-(-a^2)^{n+1}}{1+a^2}$; $D_n=(-5)\times\dfrac{1-(-5^3)^{n+1}}{1+5^3}$

Exercice 25

$A_n=9\times\dfrac{3^{n+1}-1}{8}$; $B_n=a^2\times\dfrac{1-a^{2n}}{1-a^2}$; $C_n=3^{n+2}\times\dfrac{3^{n+3}-1}{2}$

Exercice 26

$\ln 16=4\ln 2$; $\ln 512=9\ln 2$; $\ln 0.125=-3\ln 2$; $\frac{1}{8}\ln\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\ln 2$; $\ln 72-2\ln 3=3\ln 2$
$\ln 36=2\ln 2+2\ln 3$; $\ln\frac{1}{12}=-2\ln 2-\ln 3$; $\ln 2.25=2\ln 3-2\ln 2$; $\ln 21+2\ln 14-3\ln 0.875=11\ln 2+\ln 3$
$\ln 500=2\ln 2+3\ln 5$; $\ln\frac{16}{25}=4\ln 2-2\ln 5$; $\ln 6.25=2\ln 5-2\ln 2$; $\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+...+\ln\frac{99}{100}=-2\ln 2-2\ln 5$

Exercice 27

$(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

$\dfrac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2})-4\ln(\sqrt{2}+1)=\dfrac{7}{16}\ln((1+\sqrt{2})^2)-4\ln(\sqrt{2}+1)=\dfrac{14}{16}\ln(1+\sqrt{2})-4\ln(\sqrt{2}+1)=-\ln(\sqrt{2}-1)(\dfrac{7}{8}-\dfrac{32}{8})=\dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$

Exercice 28

$\ln y=\ln(12\sqrt{2}+17)$ donc $y=12\sqrt{2}+17$

Exercice 29

$A=0$; $B=0$

Exercice 30

$e^{3\ln 2}=e^{\ln 2^3}=8$; $\ln(\sqrt{e})=\frac{1}{2}$; $\ln(e^{\frac{1}{3}})=\frac{1}{3}$; $e^{-2\ln 3}=\frac{1}{9}$; $\ln(e^{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2}$; $\ln(\sqrt[5]{e})=\frac{1}{5}$

Exercice 31

$$a=\frac{3}{2}\qquad b=2\qquad c=\frac{1}{\ln 2}\qquad d=-17\qquad f=1\qquad g=-1\qquad h=e$$

Exercice 32

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $-x-5>0$ et $x-61>0$ et $x+7>0\iff x<-5$ et $x>61$ et $x>-7$. Or, $]-\infty,-5[\cap]61,+\infty[=\emptyset$. On déduit que (1) n'a aucune solution.

On a $-x-5>0$ et $\frac{x-61}{x+7}>0\iff x<-5$ et $(x-61)(x+7)>0\iff x<-5$ et $x\in]-\infty,-7[\cup]61,+\infty[\iff x\in]-\infty,-7[$.

Soit $x\in]-\infty,-7[$. On a (2) $\iff\frac{x-61}{x+7}=-x-5\iff x-61=(-x-5)(x+7)\iff x^2+13x-26=0\iff x=\frac{\sqrt{273}-13}{2}$ ou $x=\frac{-\sqrt{273}-13}{2}$. On pose $x_1=\frac{\sqrt{273}-13}{2}$ et $x_2=\frac{-\sqrt{273}-13}{2}$. On a $x_1<-7\iff\sqrt{273}<-1$ cette dernière inégalité est impossible donc $x_1\geq-7$ donc x_1 est exclue.

On a $x_2 < -7 \iff -\sqrt{273} < -1 \iff \sqrt{273} > 1$ $(\star)$. $(\star)$ est vraie donc $x_2 < -7$ (2) a donc comme ensemble de solution $\{\frac{-\sqrt{273}-13}{2}\}$.

Remarque : Notez bien l'utilisation de l'expression "On pose"' pour donner un nom à des quantités, expressions connues ainsi que l'utilisation de $(\star)$ pour nommer, en référence, une égalité— ce peut être aussi une inégalité. Ces outils rédactionnels sont bien utiles pour alléger la rédaction.

Exercice 33

inéquation 1 : $x \geq \frac{(\ln 12+5)}{3}$
inéquation 2 : $x \in [0;1]$
inéquation 3 : $x \geq \frac{2}{e}$
inéquation 4 : $x \geq -\frac{1}{12}$

Exercice 34

(1) $x = \dfrac{4}{3}$ (2) $x = 5$ (3) $x = -14,5$ (4) $x = \dfrac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{5}$.

Exercice 35

(1) $x = 2$ (2) $x = -\dfrac{113}{43}$ (3) $x = \dfrac{-21}{5}$ (4) $x = 0$.

Exercice 36

(1) $x \in \{1;2;3\}$ (2) $x \in \{0;-\dfrac{1}{5};\dfrac{3}{4};\dfrac{4}{3}\}$ (3) $x \in \{-1;1\}$ (4) $x \in \{-5;\dfrac{6}{5}\}$ (5) $x \in \{-\dfrac{7}{2};\dfrac{7}{2}\}$

(6) $x \in \{\dfrac{13}{2};\dfrac{19}{5}\}$ (7) $x \in \{-2;0;2\}$ (8) $x \in \{-\dfrac{1}{3};2;\dfrac{8}{3}\}$

Exercice 37

a) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}$ b) 8, 2 c) $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ d) 2, a e) -1, $-\pi$ f)$4-\sqrt{22}$, $4+\sqrt{22}$ g) $-\dfrac{1}{4}$, -$\dfrac{1}{2}$
h) 0, 6

i) $-2\sqrt{\dfrac{2}{3}}, 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ j) $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{26},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{26}$ k) $-3a$, $-a$ l) $-\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}, \dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ m) $\dfrac{1}{6}$, 1.

Exercice 38

Première équation : $\frac{10}{7}$ et 5, deuxième équation : ± 7, troisième équation : 0 et $\frac{1}{3}$ et dernière équation : -1 et -7.

Exercice 39

on a pour ensemble de solution pour (1) $\{2\}$, pour (2), $\emptyset$ et pour (3) $\{-\frac{7}{4}\}$.

Exercice 40

$x \in]\frac{1}{3};5[$, $x \in]-3;\frac{5}{2}[$ et $x \in [-\frac{1}{2};5[$.

Exercice 41

Dans l'ordre :
— Toujours vrai
— Toujours vrai
— $]\frac{1}{2};1[\cup]2;+\infty[$
— $]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}]\cup]2;\frac{7+\sqrt{17}}{2}]$
— $]-\infty;3[\cup]4,+\infty[$
— $[1;2]\cup[4;7]$
— $[2;5]\cup[9;12]$
— $]1;+\infty[$

Exercice 42

Dans l'ordre :
— $[0,1[$ (on peut par exemple poser $X = \sqrt{x}$ et bien tenir compte que x doit être positif)
— $[-4;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}[$ (ici il faut distinguer les cas où $x+1<0$, auquel cas l'inégalité est vraie, et le cas où $x+1 \geq 0$ et en ce cas on peut élever au carré, en tenant compte bien sûr aussi que $x \geq -4$.)
— Pas de solution. (bien examiner toutes les contraintes sur x : $x^2 - x \geq 0$, $x-3 \geq 0$...)

Exercice 43

On trouve comme solutions réelles $\pm\sqrt{5}$.

Exercice 44

Pour la première, $\ln x = -6$ ou $\ln x = 7$ soit $x = e^{-6}$ ou $x = e^{7}$. Pour la seconde, $x = e^{\sqrt{7}}$ ou $x = e^{-\sqrt{7}}$.

Exercice 45

(1) $-1 \leq x \leq 7$ (2) $x \leq -3$ ou $x \geq 2$ (3) $\mathbb{R}$ (4) $x \leq -4$ ou $x \geq -\dfrac{2}{3}$ (5) $-2 \leq x \leq 5$.

Exercice 46

On peut déjà simplifier l'expression avec les propriétés du logarithme et de la valeur absolue :

$$f(x) = xe^{|\ln|x||}$$

Si $x \in [-1;1]$, alors le logarithme est négatif et $f(x) = xe^{-\ln|x|} = \frac{x}{|x|} = \pm 1$ selon le signe de x.

Si $|x| > 1$, alors le logarithme est positif, et $f(x) = xe^{\ln|x|} = x \times |x|$. On peut alors détailler les cas plus précisément :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Exercice 47

$S_{(1)} = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$S_{(2)} = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$S_{(3)} = \left\{\frac{2\pi}{3} + k\frac{4\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{5} + k\frac{4\pi}{5}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$S_{(4)} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{10} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$S_{(5)} = \left\{\frac{5\pi}{24} + \frac{5k\pi}{6}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{4} + 5k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$S_{(6)} = \left\{\frac{\pi}{22} + \frac{2k\pi}{11}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$S_{(7)} = \{\pi + 2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$S_{(8)} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 48

Soit $x \in \mathbb{R}$. $sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $x \in \{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$ ou $x \in \{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}.\}$. On cherche les solutions comprises entre π et 2π ce qui revient à effectuer une rechercher sur les entiers k possibles pour les deux ensembles. Cela correspond donc à $x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$. Pour le deuxiṁe système on obtient une seule solution : $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 49

$\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Exercice 50

$\dfrac{\sin(2a)}{\sin(a)} - \dfrac{\cos(2a)}{\cos(a)} = \dfrac{1}{\cos(a)}$ pour $a \notin \{k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 51

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x) + sin(x))$

$\sin(x) + \cos(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$

$\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 52

$a = 24 + 7i$ $\quad b = 8 - 6i$ $\quad c = 7$ $\quad d = 1 - i$ $\quad e = \frac{3+i\sqrt{2}}{11}$ $\quad f = -\frac{1+i\sqrt{2}}{3}$
$g = -\frac{4+19i}{13}$ $\quad h = 3i$ $\quad k = \frac{12+9*I}{25}$ $\quad l = \frac{8+i}{5}$ $\quad m = \frac{9+23i}{10}$.

Exercice 53

(1) $\Longleftrightarrow z = 1 - 3 * I$ $\quad$ (2) $\Longleftrightarrow z = \frac{3+i}{4}$ $\quad$ (3) $\Longleftrightarrow z \in \{-\frac{1}{2}, 2 + i\}$ $\quad$ (4) $\Longleftrightarrow z = \frac{-40+10i}{17}$
(5) $\Longleftrightarrow z = \frac{2+i}{2}$ $\quad$ (6) $\Longleftrightarrow z \in \{-1 - i, \frac{-1+2i}{2}\}$ $\quad$ (7) $\Longleftrightarrow z = \frac{8-4i}{3}$ $\quad$ (8) $\Longleftrightarrow z = \frac{8-4i}{3}$

Exercice 54

$a = 1$, $b = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $c = 1$, $d = -1$, $f = 1$, $g = -i = e^{\frac{3i\pi}{2}}$.
$h = -i$, $j = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$, $k = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $l = e^{-\frac{i\pi}{6}}$, $m = e^{\frac{5i\pi}{4}}$.

Exercice 55

Dans l'ordre : $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = \dfrac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} c(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Exercice 56

Les solutions sont les suivantes : $\lim_{x\to+\infty} g_1(x) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} g_2(x) = 0$ $\lim_{x\to+\infty} g_3(x) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} g_4(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty} g_5(x) = 2$.

Exercice 57

On a dans l'ordre $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f_5(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty} f_6(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f_7(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty} f_8(x) = 0$

Exercice 58

Les 4 premières sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et

$f' : x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$; $f' : x \mapsto \dfrac{-2}{x^3}$; $f' : x \mapsto \dfrac{-3}{x^4}$; $f : x \mapsto \dfrac{-4}{x^5}$.

Les 4 suivantess sont dérivables sur $R \setminus \{1\}$ et

$f' : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$; $f' : x \mapsto \dfrac{2}{(1-x)^3}$; $f' : x \mapsto \dfrac{3}{(1-x)^4}$; $f' : x \mapsto \dfrac{4}{(1-x)^5}$

Les 4 dernères sont dérivables sur $R \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ et

$f' : x \mapsto \dfrac{-2}{(2x+1)^2}$; $f' : x \mapsto \dfrac{-4}{(2x+1)^3}$; $f' : x \mapsto \dfrac{-6}{(2x+1)^4}$; $f' : x \mapsto \dfrac{-8}{(2x+1)^5}$

Exercice 59

$f_1' : x \mapsto 3(x-1)^2$; $f_2' : x \mapsto 6x(x^2-1)^2$; $f_3' : x \mapsto 6(x-1)$;

$f_4' : x \mapsto 2x-3$; $f_5' : x \mapsto \dfrac{2}{(x+3)^2}$; $f_6' : x \mapsto -\dfrac{5}{(2+x)^2}$;

$f_7' : x \mapsto \dfrac{4}{(1-x)^2}$; $f_8' : x \mapsto \dfrac{6x^3+1}{x^2}$; $f_9' : x \mapsto 3x^2-6x-10$;

$g_1' : x \mapsto -3\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$; $g_2' : x \mapsto \dfrac{-x^2+6x-1}{(x^2-x+2)^2}$; $g_3' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$;

$g_4' : x \mapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; $g_5' : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $g_6' : x \mapsto \dfrac{1}{(-x+2)^2}$;

$g_7' : x \mapsto -2sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$; $g_8' : x \mapsto -2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$;

$g_9' : x \mapsto 2\cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$;

$h_1' : x \mapsto -6\sin(x)(2\cos(x)-1)$; $h_2' : x \mapsto \dfrac{-\sin^3(x)}{(1+\cos^2 x)^2}$;

$h_3' : x \mapsto 4\cos^2(x) + \cos(x) - \sin(x) - 2$

$h_4' : x \mapsto \dfrac{-x^2}{x^2cos^2(x) - 2xsin(x)cos(x) - x^2 - \cos(x)^2}$; $h_5' : x \mapsto \dfrac{5}{5x-1}$; $h_6' : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$

$h_7' : x \mapsto \dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$; $h_8' : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$; $h_9' : x \mapsto \dfrac{-2}{7-2x}$

$u_1' : x \mapsto \ln x$; $u_2' : x \mapsto 3e^{3x}$; $u_3' : x \mapsto (2x-1)e^{x^2-x+1}$

$u_4' : x \mapsto \cos x e^{\sin(x)}$; $u_5' : x \mapsto \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$; $u_6' : x \mapsto (1+\ln x)e^{x\ln(x)}$

$u_7' : x \mapsto \dfrac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$; $u_8' : x \mapsto \dfrac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}$; $u_9' : x \mapsto \dfrac{1+e^{-x}+xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

$v_1' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$; $v_2' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}(x+1)^{\frac{3}{2}}}$;

$v_3' : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin(x)}(1-\sin(x))^{\frac{3}{2}}}$; $v_4' : x \mapsto \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

Exercice 60

$x \longmapsto \ln(-x) + C$; $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 61
A une constante additive près on trouve :
$Sur\mathbb{R}$, $F : x \mapsto \frac{1}{17}x^{17} - \frac{5}{2}x^{14} + \frac{7}{6}x^{12} - \frac{1}{3}x^9 + 4x^5 + 14x^4 + 17x^3 + 9x^2 + x;$

$F_1 : x \mapsto ln|x|;$ $F_2 : x \mapsto \dfrac{-1}{x};$ $F_3 : x \mapsto \dfrac{-1}{2x^2}$ $F_4 : x \mapsto \dfrac{-1}{3x^3};$

$G_1 : x \mapsto -ln|1-x|;$ $G_2 : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)};$ $G_3 : x \mapsto \dfrac{1}{2(1-x)^2}$ $G_4 : x \mapsto \dfrac{1}{3(1-x)^3};$

$H_1 : x \mapsto \dfrac{1}{2}ln|2x+1|;$ $H_2 : x \mapsto \dfrac{-1}{2(2x+1)};$ $H_3 : x \mapsto \dfrac{-1}{4(2x+1)^2}$ $H_4 : x \mapsto \dfrac{-1}{6(2x+1)^3};$

Exercice 62

$a)x \mapsto \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - \dfrac{1}{x};$ $b)x \mapsto \dfrac{1}{20}(2x^2+1)^5;$ $c)x \mapsto \dfrac{1}{4}(x-1)^4$

$d)x \mapsto \dfrac{1}{7}x^7 - \dfrac{3}{5}x^5 + x^3 - x;$ $e)x \mapsto -\dfrac{1}{x} - 2\sqrt{x};$ $f)x \mapsto \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x;$

$g)x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos 2x$ $h)x \mapsto \dfrac{1}{3}\sin 3x;$ $i)x \mapsto x - tanx;$

$j)x \mapsto \dfrac{1}{2}ln|x^2+2x|;$ $k)x \mapsto \dfrac{1}{6}(x^2-1)^6$ $l)x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x^2+2)};$

$m)x \mapsto ln|x-3|;$ $n)x \mapsto -\dfrac{1}{x^2+x+3};$ $o)x \mapsto \dfrac{1}{3}ln|x^3-1|$

$p)x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{2x};$ $q)x \mapsto \dfrac{1}{5}\ln(5e^x+1);$ $r)x \mapsto \dfrac{3}{8}(1+e^{2x})^{\frac{4}{3}};$

$s)x \mapsto -\ln|\cos x|$ $t)\dfrac{1}{2}e^{x^2};$ $u)x \mapsto 2e^{\sqrt{x}};$

$v)x \mapsto \dfrac{15}{2}x^{\frac{2}{3}};$ $w)x \mapsto -\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ $x) - 2\sqrt{e^x};$

$y)x \mapsto \ln(1+e^x);$ $z)x \mapsto -e^{\cos x}$ $\alpha)x \mapsto -\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$\beta) - \dfrac{1}{\sqrt{1+2e^x}};$ $\gamma)x \mapsto ln|\cos x + \sin x|.$

Exercice 63
$I1 = ln2\,;\ I2 = \dfrac{1}{2}(1-e^{-2})\,;\ I3 = \dfrac{3}{2}\ln 10\,;\ I4 = 2ln\dfrac{63}{55}\,;\ I5 = 0$

Exercice 64
Les fonctions cos, sin et $x \mapsto x$ sont dérivables et leur dérivée est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction ln est dérivable sur $[1,3]$ de dérivée continue sur $[1,3]$. (on dira, de façon plus rapide, que ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sur $[1,3]$).

Une intégration par parties donne :

$$\int_1^3 xcos(x)dx = [xsin(x)]_1^3 - \int_1^3 sin(x)dx = [xsin(x)]_1^3 - [-cos(x)]_1^3 = \boxed{3sin(3) - sin(1) + cos(3) - cos(1)}.$$

$$\int_0^1 xsin(x)dx = [-xcos(x)]_0^1 - \int_0^1 (-cos(x))dx = [-xcos(x)]_0^1 + [sin(x)]_0^1 = \boxed{-cos(1) + sin(1)}.$$

$$\int_1^3 xln(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}ln(x)\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x}dx = \left[\frac{x^2}{2}ln(x)\right]_1^3 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^3 = \boxed{\tfrac{9}{2}ln(3) - 2}.$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}cos(x)dx = \left[e^{-2x}sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2e^{-2x}sin(x)dx = e^{-\pi} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}sin(x)dx$ Une deuxième intégration par parties donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}sin(x)dx = \left[-e^{-2x}cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{-2x}cos(x)dx = 1 - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}cos(x)dx.$$

On déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}cos(x)dx = e^{-\pi} + 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}cos(x)dx$ d'où, $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}cos(x)dx = \frac{e^{-\pi}+2}{5}}.$