Formulaire de terminale pour la CPGE ECG

Calcul fractionnaire

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\qquad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\qquad \frac{ka}{kb}=\frac{\cancel{k}a}{\cancel{k}b}=\frac{a}{b},\qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Pour additionner deux fractions, celles-ci doivent être sur le même dénominateur.
Pour simplifier une fraction, on peut diviser son numérateur et son dénominateur par un facteur commun.

Puissances

Pour tout $(a,b)\in(\mathbb{R}^*)^2$ et tout $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$, on a :

$$a^m a^n = a^{m+n}\qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\qquad a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$

$$a^m b^m=(ab)^m\qquad \frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Racines carrées

Pour tout $a\in\mathbb{R}_+$, $\sqrt{a}^2=a$.

Pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & \text{si } a\geqslant 0\\ -a & \text{si a} \leqslant 0\end{cases}$.

Pour tout $(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2$, on a :

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}\qquad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad (b\neq 0).$$

Identités remarquables

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2\qquad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Trinôme du second degré

Soit $P(x)=ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$. On note $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta=0$, alors P admet une racine réelle $x_0=\dfrac{-b}{2a}$ et se factorise en $P(x)=a(x-x_0)^2$.
- Si $\Delta>0$, alors P admet deux racines réelles $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et se factorise en $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
- Si $\Delta<0$, alors P n'admet aucun racine réelle.
- $P(x)$ est du signe de a, sauf entre ses racines réelles (si elles existent).

Suite arithmétique

Relation de récurrence
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe $r\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=u_n+r.$$

Le réel r est la raison de la suite.
Expression

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=u_0+nr$$
$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\quad u_n=u_p+(n-p)r$$

Somme des termes
Pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ avec $p\leqslant q$, on a :

$$\begin{aligned} u_p+\cdots+u_q &= (q+1-p)\frac{u_p+u_q}{2}\\ &= \text{nb de termes}\times\frac{1^{\text{ier}}+\ \text{dernier terme}}{2}\end{aligned}$$

En particulier :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Suite géométrique

Relation de récurrence
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe $q\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=qu_n.$$

Le réel q est la raison de la suite.
Expression

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=u_0q^n$$
$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\quad u_n=u_pq^{n-p}$$

Somme des termes
Pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ avec $n\leqslant p$, on a :

$$\begin{aligned} u_n+\cdots+u_p &= u_n\frac{1-q^{p+1-n}}{1-q}\\ &= 1^{\text{ier}}\ \text{terme}\times\frac{1-\text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1-\text{raison}}\end{aligned}$$

En particulier :

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\begin{cases} n+1 & \text{si } q=1\\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\neq 1\end{cases}$$

Trigonométrie

Valeurs remarquables

x (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Relation fondamentale

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Formules sur les angles associés

$$\begin{array}{ll}
\cos(-x) = \cos(x) & \sin(-x) = -\sin(x) \\
\cos(\pi - x) = -\cos(x) & \sin(\pi - x) = \sin(x) \\
\cos(\pi + x) = -\cos(x) & \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)
\end{array}$$

Fonction logarithme

Formules

Pour tout $(x,x') \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{ll}
\ln(x) + \ln(x') = \ln(xx') & \alpha \ln(x) = \ln\left(x^\alpha\right) \\
\ln(x) - \ln(x') = \ln\left(\frac{x}{x'}\right) & \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)
\end{array}$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{2}\ln(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right).$$

Valeurs remarquables

On a : $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Limites

Limites de référence :

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

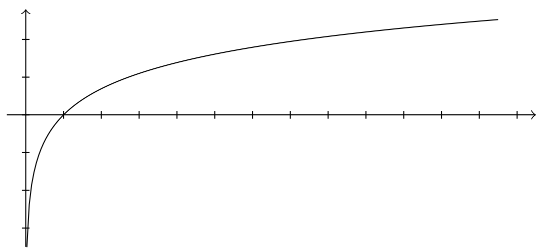
Limite « classique » :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{t \to 1} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1$$

Théorèmes de croissances comparées :

$$\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Courbe représentative



Fonction exponentielle

Relation entre les fonctions ln *et* exp

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$y = \ln(x) \iff x = \mathrm{e}^y.$$

Puissance et « passage à l'exponentielle »

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $b \in \mathbb{R}$, on a : $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$.

Formules

Pour tout $(x,x') \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{x'} = \mathrm{e}^{x+x'} & \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x'}} = \mathrm{e}^{x-x'} \\
\left(\mathrm{e}^x\right)^{x'} = \mathrm{e}^{xx'} & \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}
\end{array}$$

Limites

Limites de référence :

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

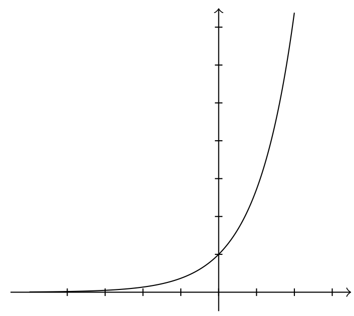
Limite « classique » :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

Théorèmes de croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0.$$

Courbe représentative



Dérivation

$$\begin{array}{ll}
(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v' & (uv)' = u'v + uv' \\
\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} & (v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'
\end{array}$$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$

Quelques savoir-faire et méthodes

Mener un calcul

Voici les méthodes qui sont généralement mises en œuvre afin de mener un calcul à son terme :

- ▶ appliquer une formule (sur les puissances, les racines carrées, les fonctions ln, exp, cos ou sin)
- ▶ factoriser en reconnaissant un facteur commun ou en appliquant une identité remarquable
- ▶ mettre sur le même dénominateur en présence d'une somme de deux quotients
- ▶ développer en appliquant la distributivité ou une identité remarquable.

Exemple. — Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, on a :

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1-2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1}.$$

Exercice. — Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, simplifier $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-1}$.

Réponse. — $\dfrac{-2}{x+1}$

Exercice. — Simplifier $A = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, $B = 5 \times 2^n - 2^{n+2}$ et $C = (\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2$.

Réponse. — $A = 4$, $B = 2^n$ et $C = 2$

Manipuler les inégalités

Une inégalité change si on applique une fonction décroissante à chacun de ses membres.
En particulier, une inégalité est modifiée après multiplication/division par un nombre strictement négatif ou après « passage à l'inverse » si chaque membre est de même signe.

Résoudre une équation ou une inéquation

On cherchera à factoriser afin d'obtenir des expressions simples dans chaque facteur.
Une étude de signe(s) passe par la résolution d'une inéquation puis par un tableau de signe(s).

Effectuer un raisonnement par récurrence

Afin de montrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, on peut effectuer un raisonnement par récurrence, celui-ci se déroulant en deux étapes :

- l'initialisation : on montre que la propriété $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie;
- l'hérédité : on suppose que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier $n \geqslant n_0$ fixé et on montre que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est également vraie.

Exemple. — Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_n$ « $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ » est vraie.

Initialisation. — Pour $n = 1$, on a : $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité. — Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

On a : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Alors :

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n \geqslant n + 1$.

Étudier les variations d'une fonction

On calcule sa fonction dérivée et on étudie le signe de celle-ci.

Exemple. — Étudions les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x+1)^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}(x+1)^2 + \mathrm{e}^{-x} \times 2(x+1) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(x+1)(-(x+1)+2) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(x+1)(1-x) \\ &= \mathrm{e}^{-x}\left(1-x^2\right). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \geqslant 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x^2$, trinôme qui s'annule en -1 et 1.
On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\searrow$		0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	

Exercice. — Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Éléments de réponse. — Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$. La fonction f est croissante sur $]0, \mathrm{e}]$ et décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.

Exercice. — Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x(\ln(x) - 1)$.

Éléments de réponse. — Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln(x)$. La fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

Exercice. — Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

Éléments de réponse. — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$.

Éléments de réponse. — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}$. La fonction f_n est croissante sur $]0, n]$ et décroissante sur $[n, +\infty[$.

Prouver une inégalité

On étudie le signe de la différence des deux membres.
On peut alors être amené à étudier la fonction ainsi définie en déterminant ses variations puis son signe après avoir calculé sa fonction dérivée.

Exemple. — Montrons que, pour tout $x > 0$, on a : $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
Pour tout $x > 0$, on a :

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0.$$

Exercice. — Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Éléments de réponse. — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{4} - x(1-x) = \dfrac{(1-2x)^2}{4} \geqslant 0$.

Exercice. — Montrer que, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, on a : $\dfrac{2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.

Éléments de réponse. — Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, $\dfrac{x+y}{2} - \dfrac{2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} = \dfrac{(x-y)^2}{2(x+y)} \geqslant 0$.

Exemple. — Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
On a :

$$\varphi'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 \iff x \geqslant \ln(1) = 0.$$

On en déduit le tableau de variations de la fonction φ :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	$\searrow$		0	$\nearrow$	

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.

Exercice. — Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leqslant x$.

Éléments de réponse. — Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x - \sin(x)$.

Exercice. — Montrer que : $\forall x \geqslant 1$, $\ln(x) \geqslant \dfrac{x-1}{x}$.

Éléments de réponse. — Étudier la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - \dfrac{x-1}{x}$.